Technique des pistes en SU DOKU

Par Robert Mauriès

Avec ses remerciements à Joël Delas, Claude Renaut et Guy Lafrance
pour leurs remarques judicieuses

Piste et Antipiste

1. Rappel de quelques définitions et propriétés

Les notions de piste, de pistes conjuguées et de pistes opposées dans une grille sudoku sont utilisées tout au long de ce document. Aussi est-il utile en préambule d'en rappeler les définitions.

Une piste P issue d'un candidat A est l'ensemble des candidats qui seraient solutions ***si*** *A était solution.*

Une piste est invalide lorsqu' elle conduit à une contradiction avec les règles du sudoku.
Une piste est valide lorsqu'elle n'est composée que de candidats effectivement solutions.

Deux pistes P1 et P2 sont conjuguées lorsqu'elles satisfont l'une des conditions suivantes : si P1 est invalide alors P2 est valide, ou, si P2 est invalide alors P1 est valide.

Deux pistes P1 et P2 sont opposéees lorsqu'elles satisfont l'une des conditions suivantes : si P1 est valide alors P2 est invalide, ou, si P2 est valide alors P1 est invalide.

Je renvoie pour d'autres notions qui seront utilisées, sans être rappelées, ainsi que pour les propriétés attachées aux pistes, à mon livre et au complément du chapitre 6 relatif aux pistes conjuguées.

Il est donc conseillé d'avoir lu préalablement ces ouvrages pour la bonne compréhention du présent document.

2. Piste et antipiste issues d'un ensemble de candidats

Rappelons aussi la définition d'une piste issue d'un ensemble de candidats.

Définition :
Une piste P issue d'un ensemble de candidats E est l'ensemble des candidats communs à toutes les pistes issues de tous les candidats de E .

Il découle de la définition même d'une piste P issue de E que :
- Si P est invalide aucun des candidats de E n'est solution.
- Si un candidat de E est solution P est valide.

A la notion de piste P issue d'un ensemble on peut associer celle d'**antipiste** P' de la manière suivante :

Définition :
Une antipiste P' issue d'un ensemble de candidats E est l'ensemble des candidats qui seraient solutions ***SI*** *<u>aucun des candidats de E n'était solution</u> .*
On dit que P' est l'antipiste de P.

Les antipistes sont des pistes qui se construisent en utilisant les techniques de base, les ensembles cachés et les bifurcations.
Piste et antipiste issues d'un ensemble ne sont pas toujours identifiables. Leur construction est donc liée à un choix judicieux de l'ensemble E.

Par exemple, sur la grille de la figure 2-1 où E est composé des candidats 3L2C1 et 3L2C2, ce que l’on écrit E={3L2C1, 3L2C2}, les candidats marqués en bleu forment la piste P issue de E et les candidats marqués en jaune forment l’antipiste P’ issue de E puisque l’invalidité de ces deux candidats valide le 9L2C2 et le 7L2C1.

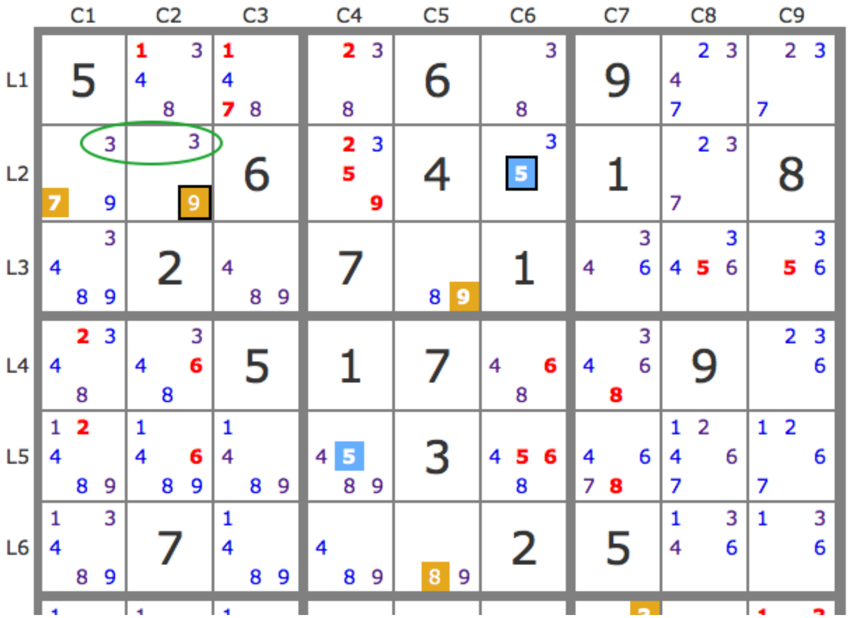

Fig 2-1, grille N°139: piste et antipiste

Comme pour une piste, une antipiste issue d’un ensemble E peut être valide ou invalide. Elle est invalide si sa construction conduit à une contradiction avec les règles du sudoku.

Il découle de la définition même d’une antipiste P’ issue de E que :
- *Si P’ est invalide un au moins des candidats de E est solution.*
- *Si aucun des candidats de E n’est solution P’ est valide.*

Propriété 2-1 : *La piste P et l’antipiste P’ issues d’un ensemble E sont des pistes conjuguées.*

En effet :
- Si P est invalide, aucun des candidats de E n’est solution, donc P’ est valide, ou,

- Si P’ est invalide, alors un au moins des candidats de E est solution, donc P est valide.

Il résulte de cette propriété que piste P et antipiste P’ permettent, comme pour les jeux de pistes issues d’une paire, de procéder à des éliminations ou validations par croisement de P et P’.

Exemple :

Sur la grille de la figure 2-2 (même grille que la fig 2-1), un autre ensemble E est composé de 3L3C1 et 6L3C7, soit E={3L3C1, 6L3C7}.

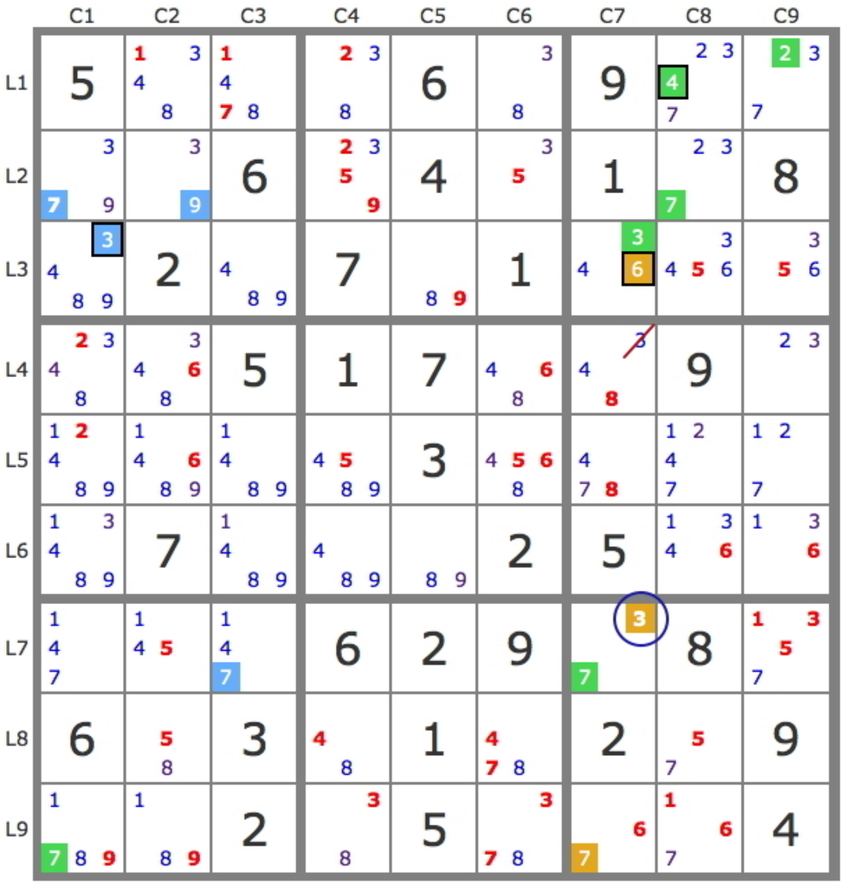

Fig 2-2, grille N°139 : croisement de la piste et son antipiste

Les deux pistes bleue et jaune issues respectivement de ces deux candidats se croisent sur 3L7C7 qui est un candidat de la piste P. L'antipiste P' de P est formée des candidats verts, disons de la piste verte, obtenue en invalidant à la fois le 3L3C1 et 6L3C7.
On peut donc éliminer le 3L4C7 puique P' passe par le 4 ou le 8 de L4C7 (doublet caché de la piste verte).
En fait l'antipiste verte est invalide puisqu'elle présente un rectangle interdit sur les cases L1C46-L9C46 alors que la grille est à solution unique. On en déduit que 3L7C7 est solution de la grille.

3. Cas de deux ensembles de candidats

Si E1 et E2 désignent deux ensembles de candidats et E leur réunion, on peut énoncer la propriété suivante :

Propriété 3-1 : *Si l'antipiste P' d'un ensemble E réunion de deux ensemble E1 et E2 est invalide, alors les pistes P1 et P2 issues respectivement de E1 et E2 sont conjuguées*

En effet : L'hypothèse P' invalide signifie que l'un au moins des candidats de E est solution. Dès lors,
- Si P1 est invalide, alors aucun des candidats de E1 n'est solution, c'est donc un au moins des candidats de E2 qui est solution, donc P2 est valide.
- Si P2 est invalide, alors aucun des candidats de E2 n'est solution, c'est donc un au moins des candidats de E1 qui est solution, donc P1 est valide.

A noter, que si l'antipiste de E couvre la grille sans contradiction, ce qui arrive assez souvent, elle fournit une solution directe (backdoor). On en verra quelques exemples dans les pages qui suivent.

Exemple :

Sur la grille de la figure 3-2, E1={7L2C1, 9L2C1} et E2={9L8C1}, donc E={7L2C1, 9L2C1, 9L8C1}.
L'invalidation des 3 candidats de E permet de construire l'antipiste verte qui est invalide puisqu'elle fait apparaître un rectangle 79L1C23-L7C23 interdit par l'unicité (acquise) de la grille.
Les deux pistes bleue et jaune issues respectivement de E1 et E2 sont donc conjuguées, ce qui permet par exemple la validation de plusieurs candidats : 4L8C8, 4L3C9, 2L8C9, … où les deux pistes se croisent.

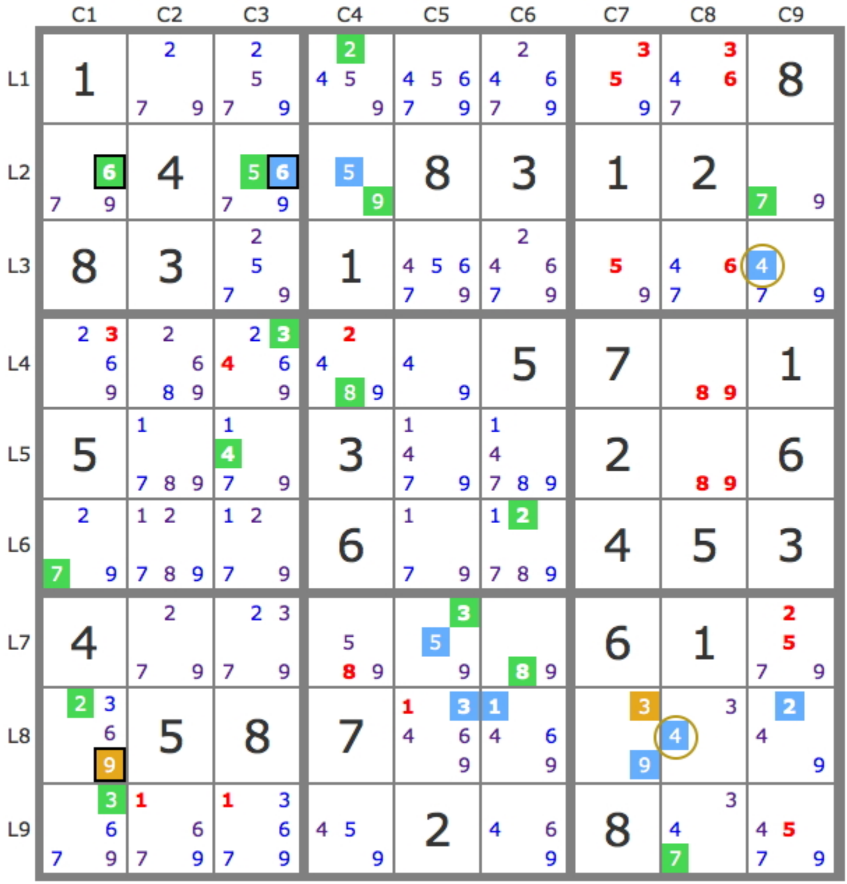

Fig 3-2, grille N°185 : croisement de pistes conjuguées

En poussant plus en avant le développement de la piste bleue on constate son invalidité, c'est donc la piste jaune qui est valide et même couvre la grille.

Remarques :

L'invalidité, si tel est le cas, d'une antipiste est généralement plus facile à établir que pour une piste par le fait que l'on invalide plusieurs candidats à la fois. C'est ce qui fait l'intérêt des propriétés 2-1 et 3-1. Ceci dit, le choix de deux ensembles E1 et E2 n'est pas toujours évident, car il faut à la fois s'assurer de l'invalidité de leur réunion et l'identification des pistes qu'ils doivent générer.

4. Cas d'un ensemble de deux candidats

Les ensembles de deux candidats sont ceux qui offrent la plus grande variété de possibilités au plan pratique.
Dans ce cas la propriété 3-1 est très utile pour rechercher les pistes conjuguées qui ne sont pas des pistes issues d'une paire.

Exemples :

Un premier exemple est celui de la célèbre grille Easter Monster ci-après (figure 4-1).
- L'ensemble E={7L1C2, 2L3C2} génère une antipiste bleue

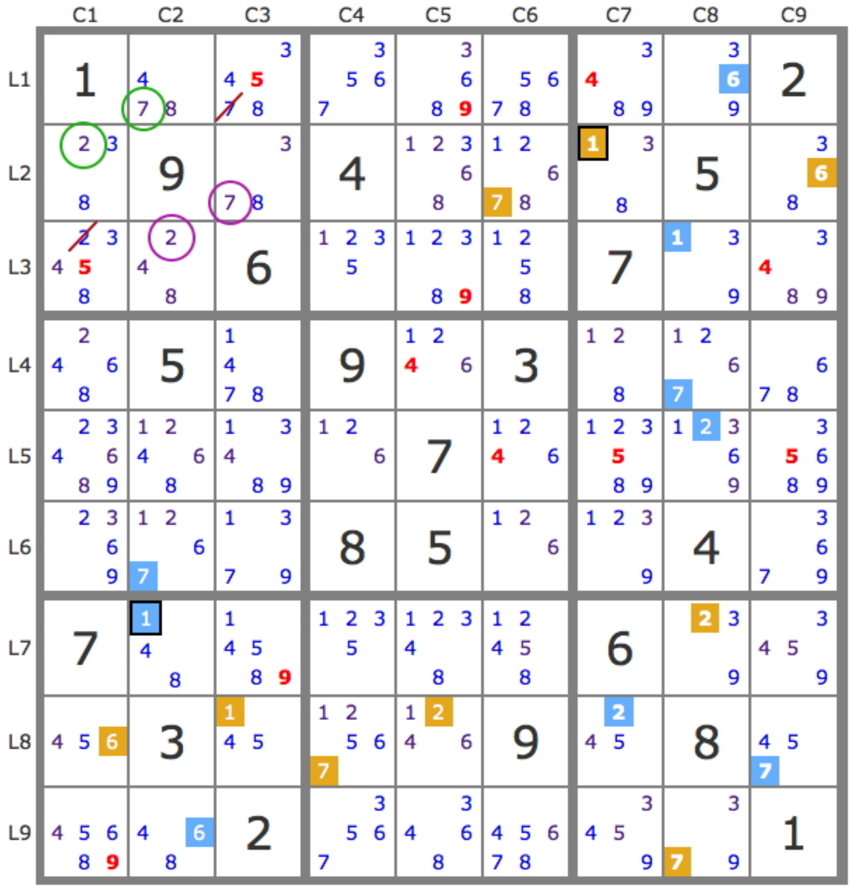

Fig 4-1, grille N°183 : Easter Monster

conduisant à contradiction dans la case L5C2 qui ne peut avoir de candidat bleu. Les pistes P1 et P2 issues de 7L1C2 et 2L3C2 sont donc conjuguées, ce qui revient à dire aussi que 7L1C2 et 2L3C2 sont conjugués (*).
- De même l'ensemble E={2L2C1, 7L2C3} génére une antipiste jaune conduisant à contradiction dans la case L2C5 qui ne peut avoir de candidat jaune. Les pistes Q1 et Q2 issues de 2L2C1 et 7L2C3 sont donc conjuguées, ce qui revient à dire aussi que 2L2C1 et 7L2C3 sont conjugués (*).
Dès lors, La piste P1 (ronds verts) passant forcément par l'un des deux candidats conjugués composant E2, puisque l'un ou l'autre est forcément solution, passe par le 2.
Pour les mêmes raisons, la piste P2 (ronds violets) passe par le 7L2C3.
On peut donc éliminer par croisement de P1 et P2 le 2L3C1 et le 7L1C3.
Le même raisonnement avec les 1 et les 6 du bloc 7 permet d'éliminer aussi le 1L7C3 et le 6L9C1.

(*) Deux candidats A1 et A2 sont conjugués lorsqu'ils satisfont la condition suivante : si A1 n'est pas solution alors A2 est solution, et si A2 n'est pas solution alors A1 est solution. Donc forcément l'un des deux est solution.

Un second exemple est celui de la grille de la figure 2-2 où les ensembles E1={3L3C1} et E2={6L3C7} sont réduit respectivement à un seul candidat. L'antipiste verte de l'ensemble E={3L3C1, 6L3C7} étant invalide, les pistes bleue et jaune issues respectivement de ces deux candidats sont conjuguées. En conséquence, le 3L7C7 qui est à l'intersection des deux pistes est solution de la grille, résultat déjà annoncé en vertu de la propriété 2-1.

5. Cas de deux paires distinctes

Un cas particulier intéressant est celui d'un ensemble de deux candidats construit en prenant respectivement un candidat dans deux paires différentes. Si (A1,B1) est une paire et (A2,B2) une autre paire, E={A1,A2}. On peut donc énoncer la propriété 3-1 de la manière suivante en prenant E1=A1 et E2=A2.

E={A1,A2} étant un ensemble formé par un candidat A1 d'une paire (A1,B1) et par un candidat A2 d'une autre paire (A2,B2) :
Si la piste construite en validant à la fois B1 et B2 est invalide, alors les pistes P1 et P2 issues de A1 et A2 sont conjuguées.

En effet, l’antipiste issue de l’ensemble E est dans ce cas construite en validant à la fois B1 et B2.

A noter qu’à l’inverse : *Si la piste construite en validant à la fois B1 et B2 couvre la grille sans contradiction, elle fournit une solution directe (backdoor).*

Exemples :

Sur la grille de la figure 5-1, on examine les deux paires 9B5 et 8B6.

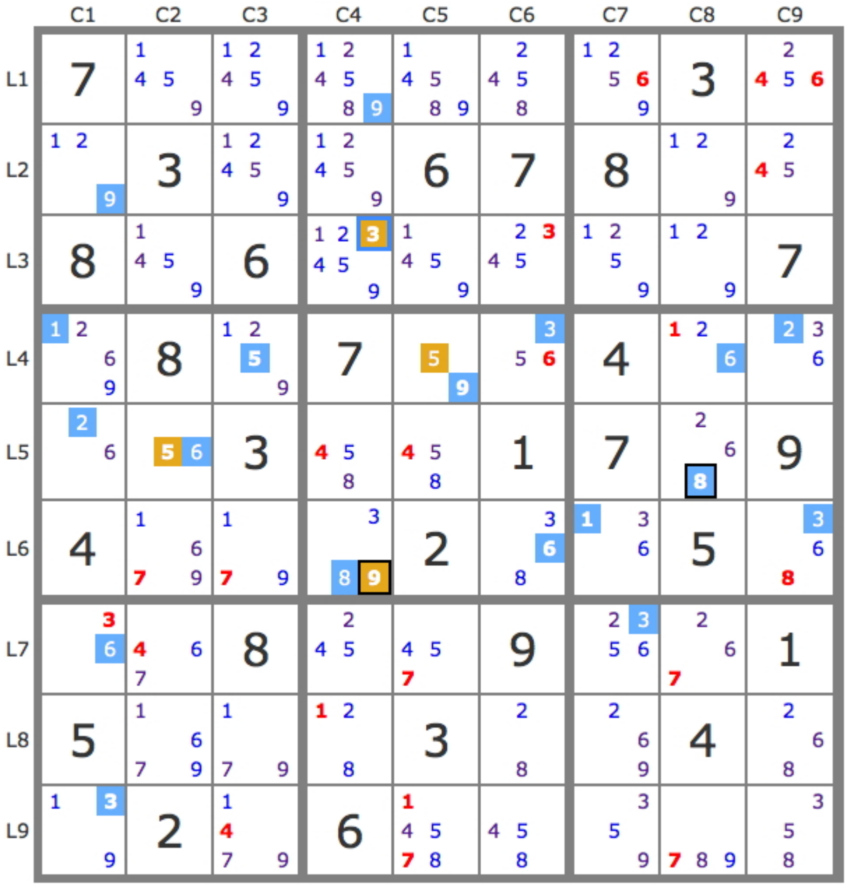

Fig 5-1, grille N°195 : Piste de l’ensemble E={A1,A2}

Les deux pistes issues de A1=9L6C4 et A2=8L5C8 se croisent sur le 3L3C4 qui est un candidat de la piste issue de E={A1, A2}.
Cela vaut donc la peine d'étudier l'antipiste de E={A1, A2}, c'est à dire la piste verte (figure 5-2) contruite en validant B1=9L4C5 et 8L6C9. Cette antipiste couvre la grille sans contradiction et fournit donc une solution directe (backdoor).
Il faut remarquer alors qu'il aurait été hâtif et faux de considérer les deux pistes jaune et bleue comme conjuguées en validant le 3L3C4 ou en procédant à des éliminations.

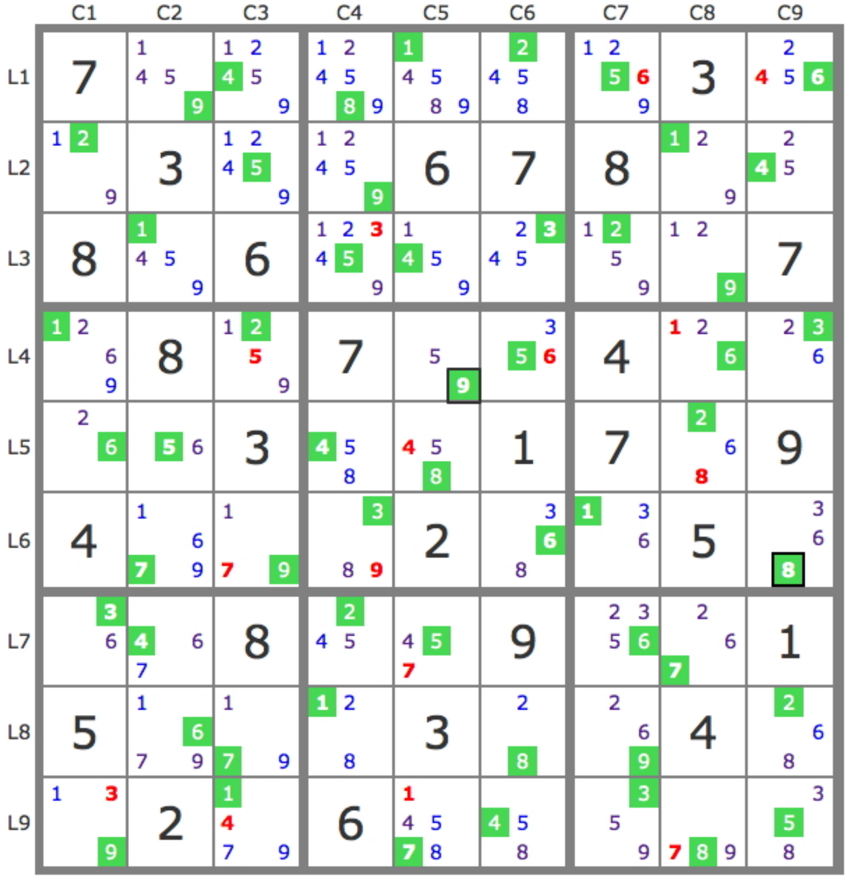

Fig 5-2, grille N°195 : Backdoor

Un autre exemple est donné par la grille de la figure 5-3 où A1=4L5C3 et A2=6L6C4. Les deux pistes issues de A1 et A2 se croisent sur 3 candidats 6 (jaunes entourés de bleu).
L’antipiste verte obtenue en validant le 4L4C1 et le 6L4C6 passe (figure 5-4) par le 2L5C3 pour éviter un rectangle interdit par l’unicité de la solution, ce qui permet son développement, mais conduit à contradiction avec un rectangle interdit 7/3L23-C69.
On peut donc valider les trois candidats 6.

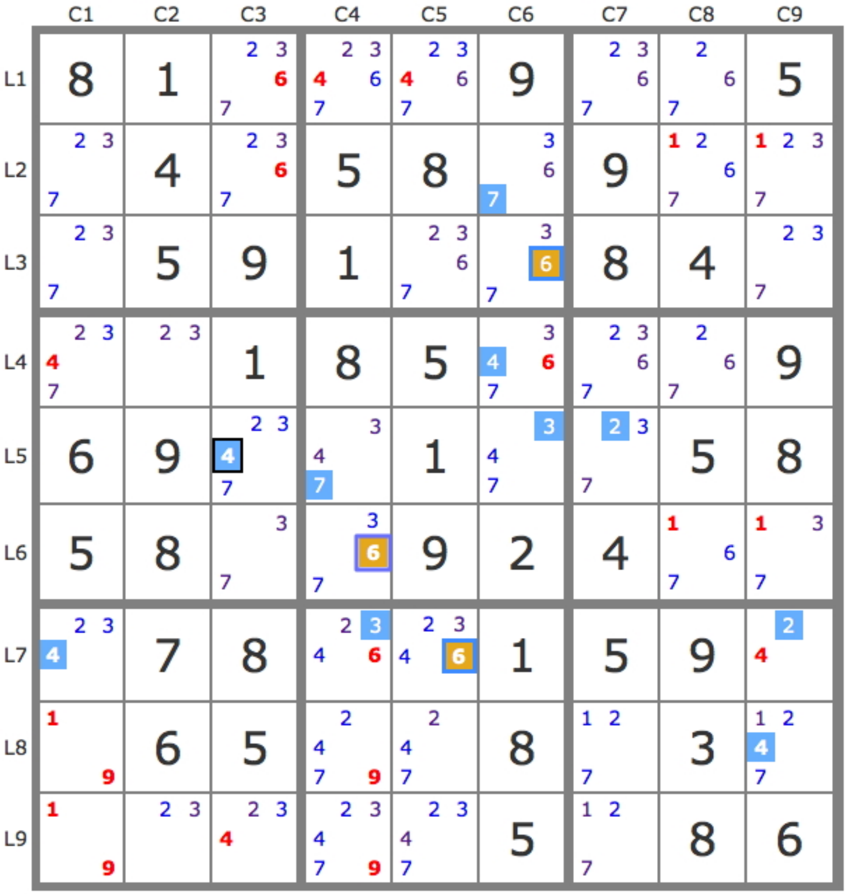

Fig 5-3, grille N°197 : piste issue de E={A1,A2}

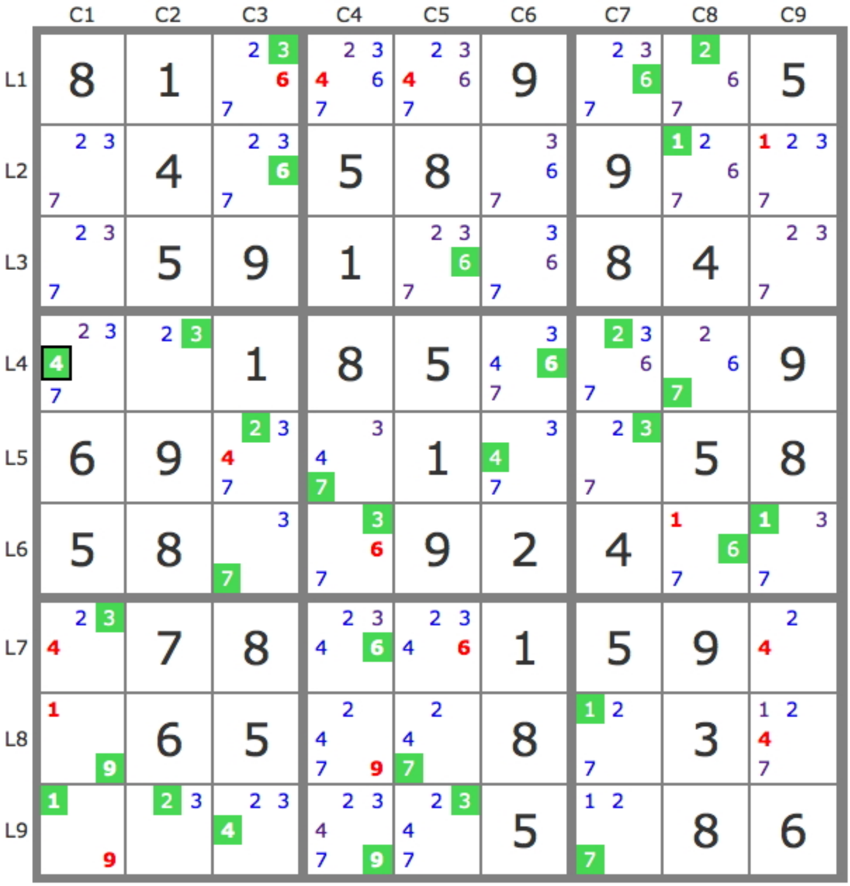

Fig 5-4, grille N°197 : invalidation de l'antipiste issue de E

Evidemment dans cet exemple volontairement choisi pour sa simplicité, le même résultat est obtenu en montrant que la piste issue du 6L4C6 est invalide.

A noter que, s'il y a unicité de la solution, on peut aussi établir la propriété complémentaire suivante.

E={A1,A2} étant un ensemble formé par un candidat A1 d'une paire (A1,B1) et par un candidat A2 d'une autre paire (A2,B2) :
Si la piste construite en validant à la fois B1 et B2 est invalide, alors les anpistes P'1 et P'2 issues de A1 et A2 sont opposées.

Ou, ce qui revient au même,

Si la piste construite en validant à la fois B1 et B2 est invalide, alors les pistes Q1 et Q2 issues de B1 et B2 sont opposées

En effet, d'une part on a P'1=Q1 et P'2=Q2, et d'autre part en raison de l'unicité de la solution si tel est le cas, on peut écrire que P1 et Q1 sont opposées ainsi que P2 et Q2.
Dès lors :
- Si P'1=Q1 est valide, alors P1 est invalide, P2 est donc valide puisque P1 et P2 sont conjuguées, il s'en suit que Q2=P'2 est invalide.
- Si P'2=Q2 est valide, alors P2 est invalide, P1 est donc valide puisque P1 et P2 sont conjuguées, il s'en suit que Q1=P'1 est invalide.

Il découle alors de 5-1 et 5-2 qu'entre pistes et antipistes on peut écrire :

- Tous les candidats de la piste P2 sont des candidats de l'antipiste P'1 de P1. Et,
- Tous les candidats de la piste P1 sont des candidats de l'antipiste P'2 de P2.

Cela résulte (voir propriété 5-1 du chapitre 6 de mon livre) du fait que P1,P'1 et P2,P'2 sont des jeux de pistes conjuguées ayant deux pistes P'1 et P'2 opposées.

Cette remarque est utile pour établir que deux pistes sont opposées alors que l'une et l'autre ne sont pas assez développées pour constater directement (visuellement) sur la grille cette opposition.

Exemple :
Sur la grille de la figure 5-5, les deux pistes bleue et verte issues respectivement du 9L4C2 et du 9L8C7 sont opposées alors que rien ne permet de le dire visuellement.
En construisant une piste qui valide ces deux candidats à la fois, cette piste qui réunit les candidats bleus et verts passerait par le 6L4C7 et le 7L5C8 marqués en violet sur la grille pour la clarté de l'explication. Le bloc 9 ne pourrait donc pas avoir de candidat 7 pour cette piste ce qui constitue une contradiction. On a donc ainsi établit que ces deux pistes sont opposées et du même coup aussi que les deux pistes issues du 9L6C2 et du 9L8C8 sont conjuguées.

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
L1	3 5 6	3 6 7 8	**1**	3 5 8 9	3 6 7 8 9	**2**	**4**	3 5 7 8 9	5 7
L2	**9**	**2**	3 5 7 8	1 3 5 8	1 3 7 8	**4**	7 8	**6**	1 5 7
L3	3 5 6	3 6 7 8	**4**	1 3 5 8 9	1 3 6 7 8 9	3 7 8 9	7 8 9	1 3 5 7 8 9	**2**
L4	3 5 6	3 6 7 9	3 5 6 7	3 9	2 3 9	**1**	2 6 7	**4**	**8**
L5	**8**	1 7	**2**	**4**	**5**	**6**	**3**	1 7	**9**
L6	**4**	1 3 6 9	3 6	**7**	2 3 8 9	3 8 9	2 6	1 5	1 5 6
L7	**7**	3 4 6 8	3 6 8	1 3 8 9	1 3 8 9	3 8 9	**5**	**2**	4 6
L8	**1**	**5**	6 8	**2**	**4**	7 8	6 7 8 9	7 8 9	**3**
L9	**2**	3 4 8	**9**	**6**	3 7 8	**5**	**1**	7 8	4 7

Fig 5-5, grille N°167 : pistes opposées

6. Cas de deux paires d'ensembles

Les paires d'ensembles, dont au préalable nous rappelons ci-dessous la définition, offrent un bon champ d'investigation pour appliquer la propriété 3-1.

Définition :
Deux ensembles de candidats E1 et F1 forment une paire d'ensemble lorsqu'ils sont disjoints (pas de candidats en communs) et que leur réunion est composée, soit de tous les candidats d'une case, soit de tous les candidats de même valeur d'une zone.

Il découle de cette définition, que si aucun des candidats de E1 n'est solution, alors forcément un candidat de F1 est solution et réciproquement.

On peut énoncer la propriété 3-1 de la manière suivante.

E={E1,E2} étant un ensemble formé par les candidats d'un ensemble E1 d'une paire d'ensembles (E1,F1) et par les candidats d'un ensemble E2 d'une autre paire d'ensembles (E2,F2) :
Si la piste construite en invalidant à la fois tous les candidats de E1 et E2 est invalide, alors les pistes P1 et P2 issues de E1 et E2 sont conjuguées.

A noter qu'à l'inverse aussi : *Si la piste construite en invalidant à la fois tous les candidats de E1 et E2, couvre la grille sans contradiction, celle-ci fournit une solution directe (backdoor).*

Exemples :

Un premier exemple est donné avec la grille 3-2 où E1 et E2 sont bien des ensembles appartenant respectivement à deux paires d'ensembles.

Sur la grille de la figure 6-1, on examine les deux paires d'ensembles (E1,F1)=(5L2C3, 78L2C3) et (E2,F2)=(78L9C5, 3L9C5).
L'antipiste de l'ensemble E={E1, E2}, ou ce qui revient au même la piste verte construite en invalidant à la fois tous les candidats de E1 et E2, conduit à contradiction dans B9 qui ne peut avoir de candidat 7 vert.
Les deux ensembles E1 et E2 génèrent les pistes respectivement bleue et jaune (figure 6-2) qui se croisent sur plusieurs candidats (jaunes entourés de bleu). On peut donc valider ces candidats.

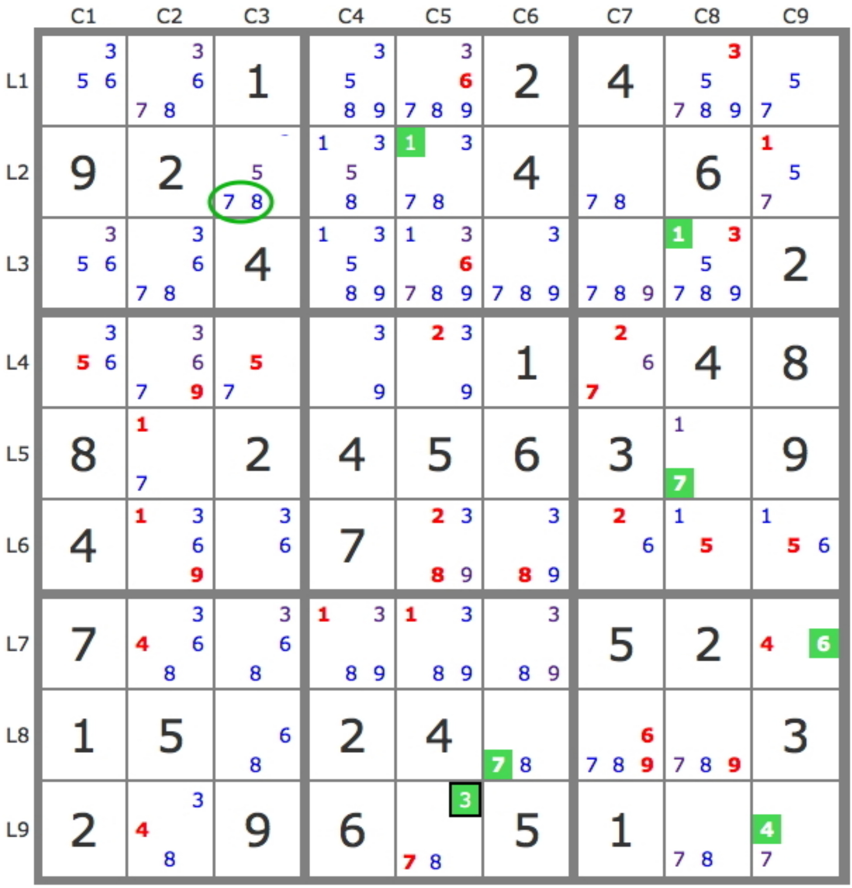

Fig 6-1, grille N°167 : invalidation de l’antipiste issue de E.

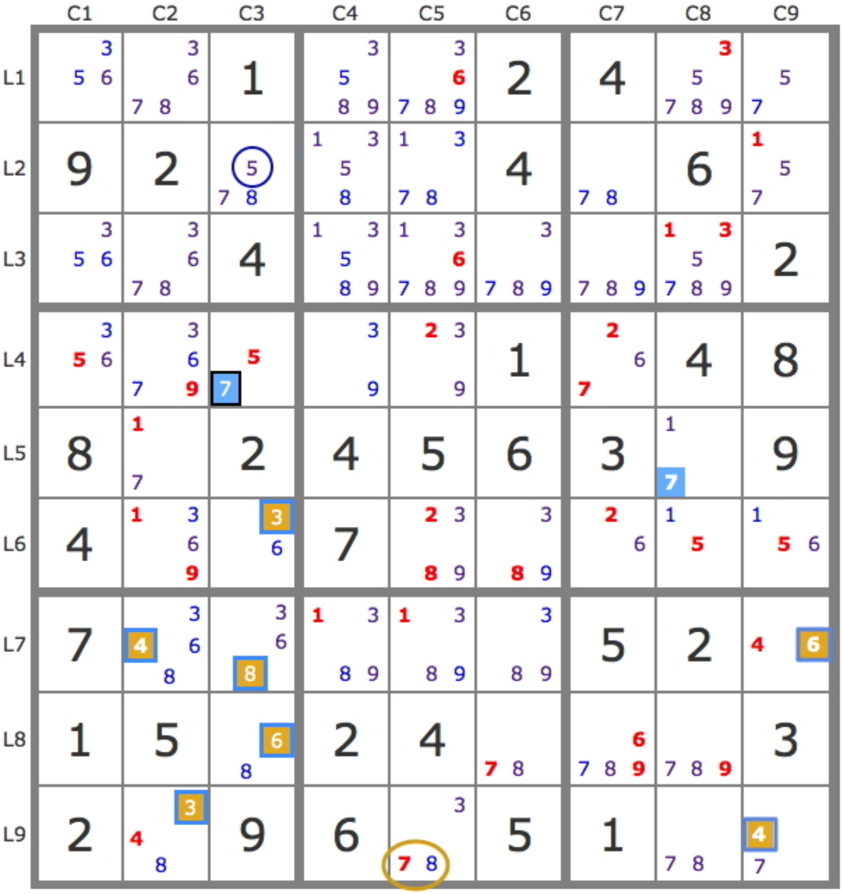

Fig 6-2, grille N°167 : croisement des P1 et P2.

Un dernier exemple avec la grille de la figure 6-3 où on examine les deux paires d’ensembles (E1,F1)=(23L4C1, 47L4C1) et (E2,F2)=(4L5C6, 4L4C6).
L’invalidation des candidats 23L4C1 et 4L5C46, permet de construire une piste verte qui couvre la grille en fournissant directement la solution unique (backdoor).

Fig 6-3, grille N°197 : backdoor.