

Technique des pistes

Introduction

Ce document est une présentation simplifiée de la Technique des Pistes (**TDP**) à l'attention de ceux qui découvrent cette technique ou ne sont pas encore bien familiarisés avec elle.

La TDP s'applique aux grilles d'un niveau supérieur à 6 pour lesquelles les techniques de base deviennent insuffisantes. Son principe repose sur la construction de deux pistes, qui sont des suites de candidats, afin d'exploiter les propriétés d'interaction de ces deux pistes pour résoudre la grille.

Terminologie, définitions et conventions

Précisons le sens donné à certains termes, notions et conventions utilisés dans ce document et la TDP.

- Une **occurrence** est un chiffre de valeur 1 à 9.
- N occurrences ($N < 81$) appelés des **dévoilés** sont placés initialement dans N cases de la grille.
- Une occurrence est **éligible** dans une case si elle est différente des dévoilés placés dans les cases des 3 zones (ligne, colonne et bloc) dont cette case est l'intersection. Un **candidat** est une des occurrences éligibles dans une case.
- Deux candidats sont **différents** s'ils ne sont pas contenus dans la même case, où s'ils sont contenus dans la même case ont des occurrences différentes.
- Un candidat est **placé** dans une case lorsqu'on considère ou qu'on établit qu'il est le seul à pouvoir être contenu dans cette case.
- Un candidat est **éliminé** d'une case lorsqu'on considère ou qu'on établit qu'il ne peut plus être placé dans cette case.
- Un candidat est **désigné** par son occurrence et la position dans la grille (ligne-colonne) de la case qui le contient. Par exemple 5L2C6 désigne le candidat d'occurrence 5 contenu dans la case située à l'intersection de la ligne 2 et de la colonne 6.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |

Graphiquement les candidats sont inscrits dans leurs cases en les disposant dans l'ordre de leur occurrence de gauche à droite et de haut en bas comme sur la figure ci-contre.

Les **techniques de base (notée TB)** désignent les techniques simples : recherche et placement des candidats uniques, recherche et exploitation des ensembles alignés et des ensembles fermés.

La **règle de jeu** stipule que l'on doit placer un candidat et un seul par case et par zone (ligne, colonne et bloc).

Définition d'une piste issue d'un candidat

Une piste **P** issue d'un candidat **A** est l'ensemble des candidats que l'on placerait sur la grille avec les TB "SI" le candidat A était placé. A est appelé candidat de départ ou candidat générateur de P.

Par exemple, sur la grille de la figure 1, le candidat de départ de la piste à construire étant le 5L5C6, la piste est composée de tous les candidats coloriés en bleu.

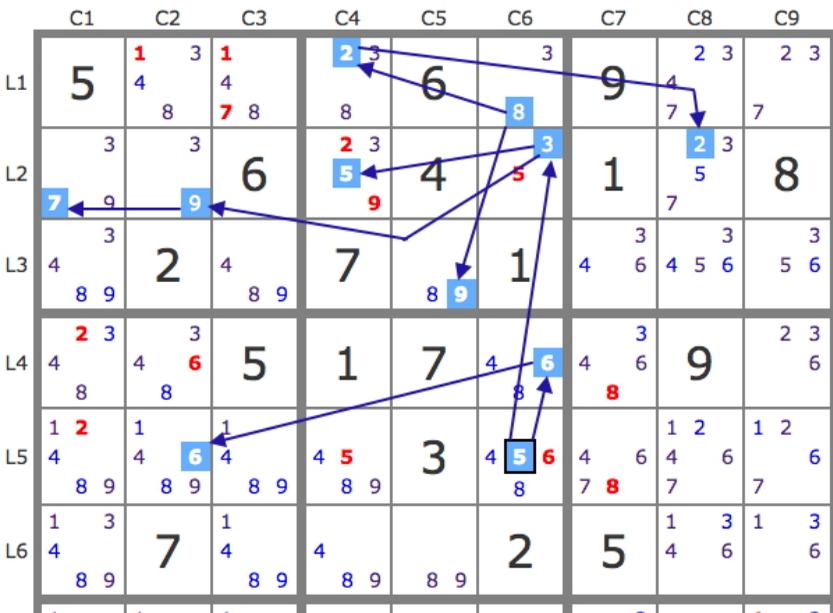


Fig 1 : Piste issue d'un candidat

En effet, si le 5L5C6 était placé, le 6L4C6 qui serait seul dans B5 serait placé, alors le 6L5C2 serait placé aussi, tandis que le 3 étant seul dans L2C6 serait aussi placé, donc le 8L1C6 aussi, etc...

Marquage d'une piste

Avec les logiciels, ou les applications internet (<http://www.assistant-sudoku.com>), disposant d'un marquage des candidats par couleur, le marquage des candidats d'une piste est fait comme sur la figure 1 par un carré d'une même couleur (les flèches ne servant ici qu'à expliquer le cheminement suivi).

Sur les grilles papier proposées dans les magazines, le marquage peut être fait, au crayon en marquant d'un même symbole (. ou /) chaque candidat de la piste.

Paire de candidats

Dans les grilles de sudoku, même les plus difficiles, un certain nombre de candidats forment des paires (ou couples) au sens général suivant:

Une **paire** (ou couple) est un couple de deux candidats qui, sont seuls à occuper une case, ou bien, ont la même valeur et sont les seuls de cette valeur dans une zone sudoku (bloc, ligne ou colonne).

| | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 | C6 | C7 | C8 | C9 |
|----|---------|---------|-------|-----|-------|----|-------|---------|---------|
| L1 | 4 | 7 9 | 6 7 9 | 1 6 | 3 | 8 | 5 | 1 2 7 9 | 1 2 7 9 |
| L2 | 1 5 7 9 | 7 8 9 | 5 8 | 4 | 1 7 | 2 | 6 | 3 | 1 7 9 |
| L3 | 1 3 7 | 3 6 7 8 | 2 | 9 | 1 6 7 | 5 | 1 7 8 | 1 7 8 | 4 |

Fig 3 : paires de candidats

Sur la grille de la figure 3, les paires de candidats de même valeur sont portées en rouge, mais on voit aussi d'autres paires comme celles des couples 1/6 de L1C4, 7/9 de L1C3, 1/7 de L2C5 ou 5/8 de L2C3.

Jeu de pistes issues d'une paire

En traçant deux pistes issues respectivement de chacun des candidats d'une paire on peut résoudre partiellement ou totalement une grille, cela en raison des propriétés d'interaction suivantes :

Propriété 1 : P1 et P2 étant respectivement les pistes issues des deux candidats d'une paire, tout candidat qui "voit" à la fois un candidat de P1 et un candidat de P2 peut être éliminé de la grille.

Précisons un point de terminologie de cette propriété :

On dit qu'un candidat "voit" un autre candidat lorsque, soit les deux candidats sont dans la même case, soit les deux candidats ont la même valeur et sont dans une même zone.

Sur la grille de la figure 4 où l'on a tracé, au départ de la paire 36L2C7, une piste bleue issue du 6L2C7 et une piste jaune issue du 3L2C7, tous les candidats barrés en rouge peuvent être éliminés car ils voient des candidats des deux pistes.

Le 6L4C7 voit le 6L2C7 bleu et le 6L6C7 jaune, le 5L4C5 et le 9L4C5 voient le 3L4C5 jaune et le 6L4C5 bleu, etc...

| | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 | C6 | C7 | C8 | C9 |
|-----|----------|-----|----------|----------|----------|-------|-------------|--------|------------|
| L1 | 1 2 4 | 6 | 4 3 | 1 2 3 | 1 3 | 2 3 | 3 | 5 | 2 3 4 |
| L2 | 8 9 | | 8 9 | 7 8 9 | 8 9 | 7 8 9 | 7 | 2 | 7 |
| L3 | 1 2 4 | 1 2 | 7 | 5 | 1 3 | 2 3 | 3 | 4 | 9 |
| L4 | 8 | | | | 8 | 8 | 6 | 8 | |
| L5 | 2 | 5 | 3 | 2 3 | 4 | 2 3 | 1 | 2 | 2 3 6 |
| L6 | 8 9 | | 8 9 | 7 8 9 | 7 8 9 | 7 8 9 | 8 | 7 | 7 |
| L7 | 4 5 9 | 7 | 4 5 9 | 2 3 6 | 3 6 | 1 | 3 5 9 | 2 9 | 8 |
| L8 | 1 2 5 | 1 2 | 6 | 2 3 | 7 | 2 3 | 4 | 1 2 | 1 2 3 5 |
| L9 | 8 9 | 9 | | 8 9 | 8 9 | 8 9 | 4 | 9 | |
| L10 | 3 | 1 2 | 5 8 9 | 4 | 5 8 9 | 2 | 5 6 9 | 7 | 1 2 5 6 |
| L11 | | 9 | | | 8 9 | 8 9 | | | |

Fig 4 : interactions des deux pistes issue de 36L2C7

La propriété suivante est une conséquence de la précédente.

Propriété 2 : P1 et P2 étant respectivement les pistes issues des deux candidats d'une paire, si les deux pistes ont en commun un même candidat dans une case, ce candidat est solution de la case. On dit que les deux pistes se croisent sur ce candidat.

Par exemple sur la grille de la figure 5, les deux pistes issues des 6 du bloc 2 ont en commun le 7 de L2C5. Le 7 de L2C5 est donc solution de la grille.

| | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 | C6 | C7 | C8 | C9 |
|----|---------------|----------|------------|--------|-------------|--------|--------------|------------|------------|
| L1 | 4 | 6 7 9 | 7 9 | 1 6 | 3 | 8 | 5 | 1 2 7 9 | 1 2 7 9 |
| L2 | 1 5 7 9 | 8 7 9 | 5 7 8 9 | 4 | 1 7 | 2 | 6 | 3 | 1 7 9 |
| L3 | 1 3 7 | 3 7 | 6 2 | 9 | 1 7 | 6 5 | 1 7 8 | 1 7 8 | 4 |
| L4 | 2 3 7 9 | 3 7 9 | 4 7 9 | 1 2 | 5 | 4 3 | 1 2 3 7 9 | 6 | 8 |
| L5 | 2 3 9 | 5 | 6 9 | 8 | 1 6 9 | 7 | 1 2 3 9 | 4 | 1 2 9 |
| L6 | 8 | 1 | 4 6 7 9 | 2 6 | 6 4 9 | 3 | 2 3 7 9 | 2 5 7 9 | 2 5 7 9 |
| L7 | 5 | | 5 | 3 | 2 | 1 | 4 | 5 | 6 |

Fig 5 : croisement des pistes, validation

Exemple de résolution d'une grille

Voici un exemple de résolution d'une grille faisant appel aux propriétés énoncées dans le paragraphe précédent. C'est une grille de niveau 9/10 que l'on peut résoudre avec un jeu de pistes issues d'une paire. Sur la grille préalablement simplifiée avec les techniques de base, on a tracé la piste bleue et la piste jaune issues des 7 de la paire de 7 du bloc 1 (figure 6).

Le choix de ces candidats a été fait parce que les deux pistes se développent plutôt bien, ce qui laisse penser que des interactions entre-elles simplifieront la grille.

C'est le cas effectivement avec des éliminations (candidats barrés en rouge) et la validation comme solutions du 3L3C8, du 1L8C5, et de tous les candidats entourés d'un rond faisant partie de la piste jaune, où les deux pistes se croisent, ce qui suffit ensuite pour terminer la grille par les techniques de base.

| | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 | C6 | C7 | C8 | C9 |
|----|--------|----------|--------|------------|------------|----------|----------------|------------------|--------------------|
| L1 | 7 | 3 | 4 | 2 7 8 | 1 2 6 7 | 1 2 8 | 1 6 8 9 | 5 | 1 6 8 9 |
| L2 | 1 | 2 | 5 | 9 | 4 6 | 4 8 | 4 6 8 | 7 | 4 6 8 |
| L3 | 6 | 8 | 7 | 4 7 | 5 | 1 4 | 1 9 | 3 | 2 |
| L4 | 4 9 | 4 | 6 | 3 | 1 | 2 4 7 | 2 4 5 8 | 2 4 5 6 7 8 9 | 6 4 6 8 9 7 8 9 |
| L5 | 5 | 7 | 1 | 2 4 | 3 | 6 | 1 2 4 8 9 | 1 4 | 1 4 8 9 |
| L6 | 4 9 | 1 4 | 8 | 2 4 5 7 | 2 4 7 | 2 4 5 | 1 2 4 5 6 7 | 3 6 4 9 7 | 1 4 6 9 |
| L7 | 8 | 9 | 2 | 4 6 4 6 | 7 | 3 | 1 | 5 | |
| L8 | 3 | 5 | 6 | 2 5 | 1 2 | 9 | 7 8 | 4 | 7 8 |
| L9 | 4 7 | 1 4 5 | 1 7 | 3 | 8 | 1 5 | 6 9 | 2 | 6 9 |

Fig 6 : validations et éliminations

Jeux de pistes successifs

Si les interactions des deux pistes d'un premier jeu de pistes issues d'une paire ne solutionne la grille que partiellement, on efface les deux pistes et on utilise un nouveau jeu de pistes issues d'une autre paire de candidats, et ainsi de suite.

Par exemple, la grille suivante de niveau 10/12 peut se résoudre avec deux jeux de pistes successifs.

Un premier jeu de pistes issues de la paire de 9 du bloc 4 permet quelques éliminations (barrés en rouge) et 4 validations comme solutions de leurs cases (entourés d'un rond jaune) figure 7.

| | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 | C6 | C7 | C8 | C9 |
|----|--------|------------|-----------------|---------------|-------------------|-----------------|-----------------|--------------|---------------|
| L1 | 4 5 | 7 | 4 3 8 | 1 3 4 5 | 1 3 4 5 8 | 9 | 1 5 8 | 2 | 6 |
| L2 | 5 9 | 3 8 9 | 2 3 8 | 1 3 5 | 1 2 3 5 7 8 | 6 | 4 | 7 8 9 | 1 5 7 8 |
| L3 | 1 | 6 4 8 9 | 2 8 | 6 8 | 4 5 | 2 4 5 7 8 | 5 7 8 9 | 3 | 5 7 8 |
| L4 | 6 | 1 8 | 1 4 5 7 8 | 1 3 4 5 | 1 3 4 5 7 | 2 | 1 3 7 8 | 4 7 8 | 9 |
| L5 | 4 9 | 2 | 1 4 7 8 | 1 3 4 9 | 1 3 6 4 7 9 | 1 3 6 4 7 | 1 3 6 7 8 | 5 | 1 4 7 8 |
| L6 | 3 | 1 9 | 1 4 5 7 | 8 | 1 4 5 6 7 9 | 1 4 5 7 | 1 6 4 7 | 6 7 | 2 |
| L7 | 7 8 | 5 | 1 6 | 1 4 9 | 1 6 4 8 9 | 1 6 4 8 | 2 | 4 6 7 8 9 | 3 |
| L8 | 7 8 | 1 3 6 | 9 | 2 | 1 3 4 5 6 8 | 1 3 4 5 8 | 5 6 7 8 | 4 6 7 8 | 4 5 7 8 |
| L9 | 2 | 4 | 3 6 | 7 | 5 6 8 9 | 5 8 | 3 5 6 8 9 | 1 | 5 8 |

Fig 7 : 1^{er} jeu de pistes au départ de la paire de 9 de B4

Sur la piste ainsi simplifiée, on poursuit le développement de la piste jaune (figure 8) pour aboutir à deux autres validations par croisement des deux pistes (candidats entourés d'un rond), ce qui permet plusieurs placements par les techniques de base.

| | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 | C6 | C7 | C8 | C9 |
|----|--------|----------|---------------|-----------------|-------------------|---------------|-----------------|------------|-------------|
| L1 | 4 5 | 7 | 4 3 8 | 1 3 4 5 | 1 3 4 5 8 | 9 | 1 5 8 | 2 | 6 |
| L2 | 5 9 | 8 9 8 | 3 2 3 8 | 1 3 5 | 1 2 3 5 7 8 | 6 | 4 | 7 8 9 7 | 1 5 |
| L3 | 1 | 8 9 8 | 6 4 2 8 | 4 5 | 4 5 7 8 | 4 5 7 8 | 7 5 8 9 | 3 | 5 7 |
| L4 | 6 | 1 8 | 4 5 7 8 | 1 3 4 5 | 1 3 4 5 7 | 2 | 1 3 7 8 | 4 7 8 | 9 |
| L5 | 4 9 | 2 | 4 7 8 | 1 3 4 6 9 | 1 3 4 6 7 9 | 1 3 4 | 1 3 6 7 8 | 5 | 1 4 7 |
| L6 | 3 | 1 9 | 4 5 7 | 8 | 1 4 5 6 7 9 | 1 4 5 7 | 1 6 7 | 4 6 | 2 |
| L7 | 7 | 5 | 1 | 6 4 9 8 | 4 8 | 4 8 | 2 | 6 9 | 3 |
| L8 | 8 | 3 6 | 9 | 2 | 1 3 5 6 | 1 3 5 | 7 5 6 7 | 4 7 | 6 4 5 7 |
| L9 | 2 | 4 | 3 6 | 7 | 5 6 9 | 5 3 | 5 6 9 | 1 | 8 |

Fig 8 : développement de la piste jaune

Sur la grille alors largement simplifiée, on efface le premier jeu de pistes pour tracer un second jeu de pistes issues de la paire de 4 du bloc 6 (figure 9). Les deux pistes qui se développent bien permettent quelques éliminations (candidats barrés en rouge) et deux validations comme solutions de leurs cases (candidats entourés d'un rond), ce qui suffit pour terminer la grille par les techniques de base (affirmation laissée à votre vérification).

| | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 | C6 | C7 | C8 | C9 |
|----|----|-------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----|-----|
| L1 | 5 | 7 | 4 3 | 1 3 | 4 3 | 9 | 1 8 | 2 | 6 |
| L2 | 9 | 8 3 | 2 3 | 1 3 | 5 2 3 | 6 | 4 7 8 | 1 5 | 7 |
| L3 | 1 | 8 6 4 | 2 6 | 4 5 | 4 5 | 4 5 | 9 | 3 5 | 7 |
| L4 | 6 | 1 5 8 | 4 5 | 4 5 3 | 2 | 7 8 | 3 4 7 8 | 9 | |
| L5 | 4 | 2 7 8 | 9 | 1 3 6 | 1 3 | 7 8 | 3 6 | 5 | 1 7 |
| L6 | 3 | 9 5 | 8 | 1 4 5 6 | 1 4 5 | 1 7 | 6 4 | 6 | 2 |
| L7 | 7 | 5 3 6 | 1 | 6 4 8 | 4 8 | 2 | 9 | 3 | |
| L8 | 8 | 3 6 | 9 | 2 1 3 | 5 3 | 1 5 | 7 5 6 | 7 6 | 4 |
| L9 | 2 | 4 | 3 6 | 7 | 9 | 5 3 | 5 6 | 1 | 8 |

Fig 9 : 2ème jeu de pistes au départ de la paire de 4 de B4

Piste invalide et piste valide

En développant une piste rien n'assure que l'on aboutira à la solution de la grille, il est même "probable" que ce soit le contraire d'où la définition suivante :

*Une piste **P** issue d'un candidat **A** est invalide lorsque son développement conduit à l'impossibilité de respecter la règle du sudoku (1 candidat et un seul par case et par zone).*

Par exemple, sur la grille ci-dessous N°615 de l'Assistant Sudoku, la piste jaune issue du 5L2C4 est invalide car il est impossible de placer un 6 pour cette piste dans le bloc1 sans contredire la règle du sudoku.

| | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 | C6 | C7 | C8 | C9 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| L1 | 4 | 6 | 4 | 5 | 6 | 7 | 2 | 9 | 4 |
| L2 | 7 | 9 | 5 | 5 | 6 | 4 | 2 | 8 | 1 |
| L3 | 1 | 4 | 4 | 3 | 9 | 8 | 5 | 4 | 6 |
| L4 | 4 | 4 | 4 | 9 | 5 | 1 | 6 | 4 | 4 |
| L5 | 9 | 3 | 2 | 8 | 2 | 4 | 7 | 1 | 5 |
| L6 | 4 | 4 | 1 | 5 | 5 | 3 | 9 | 4 | 4 |
| L7 | 5 | 4 | 3 | 4 | 1 | 6 | 4 | 2 | 9 |
| L8 | 4 | 6 | 4 | 2 | 8 | 9 | 4 | 5 | 3 |
| L9 | 4 | 8 | 9 | 4 | 3 | 5 | 1 | 6 | 2 |

Fig 10 : piste invalide et piste valide

Il découle de cette définition de l'invalidité la propriété suivante :

Propriété 3 : *Le candidat **A** générateur d'une piste **P** invalide ne peut pas être solution de sa case et peut donc être éliminé.*

Dans l'exemple précédent on peut donc éliminer le 5L2C4 ce qui valide le 6L2C4 comme solution de sa case.

A contrario une piste peut être valide selon la définition suivante :

*Une piste **P** issue d'un candidat **A** est valide lorsque que tous les candidats qui la composent sont solutions de leurs cases.*

Dès lors, on peut énoncer la propriété suivante très utile dans la résolution d'une grille :

Propriété 4 : P1 et P2 étant respectivement les pistes issues des deux candidats d'une paire, si P1 est invalide tous les candidats de P2 peuvent être placés comme solutions de leurs cases.

Par exemple, sur la grille ci-dessus (fig. 10), comme la piste jaune (P1) est invalide, on peut valider comme solutions de leurs cases respectives les 5 candidats de la piste bleue (P2).

Dès lors la grille se simplifie beaucoup mais n'est pas totalement résolue et on peut donc étudier un autre jeu de deux pistes issues d'une autre paire (affirmation laissée à votre initiative).

Pour en savoir plus

Ces premiers éléments de la TDP suffisent déjà pour résoudre de nombreuses grilles.

Pour s'entraîner on peut examiner les résolutions proposées sur l'Assistant Sudoku (<http://www.assistant-sudoku.com>) dans la rubrique "Résolutions guidées", notamment les grilles des années 2013 à 2015 plus détaillées que les grilles récentes.

La technique des pistes ne se résume pas à l'utilisation d'un ou plusieurs jeux de pistes issues d'une paire. D'autres notions et propriétés permettent de traiter les grilles les plus difficiles : antipistes, pistes conjuguées, pistes opposées, extensions, etc... sujets présentés dans les autres documents sur la TDP consultables sur l'AssistantSudoku.

Robert Mauriès

Créateur de la technique des pistes

Tous droits de reproduction réservés.

Edition du 20/05/2019