Technique des Pistes (TDP)

Ce document est la traduction de la version anglaise « TDP theory » publiée sur le forum forum.enjoysudoku.com

Partie 1

Introduction

Je présente ici la méthode de résolution des grilles de sudoku à solution unique (puzzle) que j'appelle "Technique des pistes", TDP en bref.
Cette méthode s'inspire de "Forcing chains" mais s'en distingue par le fait qu'elle traite le puzzle de manière globale, et permet de développer une théorie avec ses définitions, ses propriétés et ses théorèmes. C'est une approche globale de la résolution au même titre que celle d'Allan Barker ou de Denis Berthier.
D'un point de vue pratique, elle permet au sudokiste de ne mémoriser qu'une seule façon de faire les choses, ce qui est plus simple que de connaître différentes techniques avancées qui ne sont pas toujours faciles à appliquer. En France, où j'ai publié un livre et développé un site Internet (http://www.assistant-sudoku.com), de nombreux sudokistes utilisent cette méthode.
Le but de cet article est de présenter la TDP et ses arguments de la manière la plus simple possible. Un document complet sur cette méthode est disponible sur mon site web http://www.assistant-sudoku.com.

Techniques de base

La TDP utilise des techniques de base (TB) pour sa mise en œuvre, je précise donc ici ce que je considère comme des techniques de base. Ce sont celles que chaque sudokiste connaît en principe : les candidats uniques, les ensembles fermés (doublets, triplets, etc...) et les alignements.
On peut éventuellement ajouter le X-wing pour sa simplicité, mais rien n'empêche ceux qui le veulent d'ajouter d'autres techniques qu'ils maîtrisent bien.

Donnons ici une définition utile pour l'ensemble de la TDP.

Soient K1, K2,.... les cellules qui contiennent les candidats Ai de tout ensemble E={Ai, i=1,p} et par Ei l'ensemble des candidats de E contenu dans Ki. Nous avons E=UEi.
E'i désigne l'ensemble complémentaire de Ei dans Ki.
Les ensembles Ei sont appelés les composantes de E. Les ensembles E'i sont appelés les contre-composantes de E.
G désigne l'ensemble des candidats de la grille sudoku.

Anti-piste

Commençons par la notion d'anti-piste et sa définition.

Définition :
- E = {Ai, i=1,2,...,n} étant un ensemble de n candidats Ai de G, une anti-piste P'(E) = {Bj, j=1,2,...,m} est l'ensemble des m candidats Bj qui seraient placés avec les techniques de base (TB) comme solution de leurs cellules ***SI*** *les candidats de E étaient éliminés de G. On dit que E génère P'(E).*
- Le pseudo-puzzle associé à P'(E) est le puzzle que l'on obtiendrait en plaçant les candidats Bj de P'(E).

En conséquence de cette définition, trois situations peuvent se produire :

- soit, le placement des candidats Bi rencontre une contradiction (aucun candidat Bj possible dans une cellule, deux candidats Bj dans la même zone, etc...). On dit alors que P'(E) est invalide.
- soit, les candidats de P'(E) sont tous des candidats solution. On dit que P'(E) est valide. Nous verrons plus tard quand cette situation se produit.
- soit, rien ne peut être conclu à ce stade sur le statut de P'(E), car il ne peut être prouvé que P'(E) est valide ou invalide.

<u>Diagramme de construction :</u>

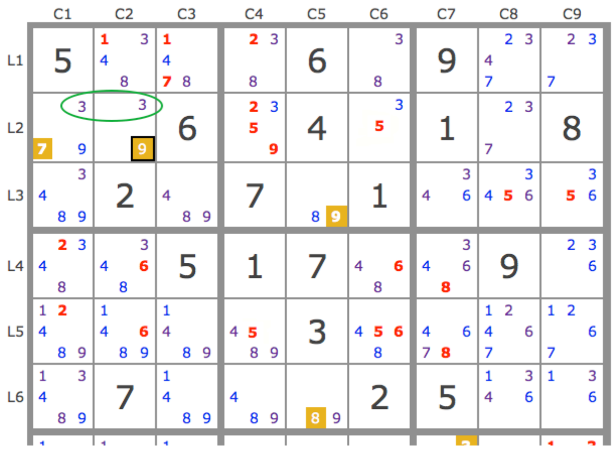
La représentation d'une anti-piste se fait généralement par un marquage couleur des candidats directement sur le puzzle(voir ci-dessous), mais il est utile aussi pour expliquer le déroulement de la consruction de faire le un diagramme reliant les candidats entre eux de la manière suivante :

```
P'(E) : (-E)->B1->B2->[(B3->B4)->B5]->B6 …
                       \
                        ->B7->B8 …
```

qui ici signifie : la suppression des candidats de E impose le placement de B1, lequel impose le placement de B2, lequel impose les placements de B3,B4 et B5, lesquels imposent le placement de B6, mais aussi le placement de B2 impose celui de B7 puis de B8, etc…

Voici un exemple simple de construction d'une anti-piste utilisant sur le puzzle un marquage des candidats par une couleur jaune.
E={3r2c1, 3r2c2}, on écrira aussi E=3r2c12.
P'(E)={9r2c2, 7r2c1, 9r3c5, 8r6c5, ...} dont le diagramme de construction est :

```
P'(E)  : -(E)->9r2c2->9r3c5->8r6c5
            \         \
             ----------->7r2c1
```



Une première propriété évidente et utile qui résulte de la définition même d'une antipiste est la suivante :

Théorème 1 :
Si P'(E) est invalide, alors au moins un candidat Ai de E est solution dans sa cellule.
Par conséquent, tout candidat C qui voit tous les candidats Ai de E peut être éliminé.*

**On dit que deux candidats A et C se voient lorsqu'ils sont soit dans la même cellule, soit ont la même occurrence et sont dans la même zone (ligne, colonne ou bloc).*

En effet, si aucun candidat de E n'était solution, alors par définition tous les candidats de P'(E) seraient solutions et P'(E) serait valide.

Enonçons un deuxième théorème très utile pour résoudre des puzzles.

Théorème 2 :
Si B est un candidat contenu dans P'(E), alors tout candidat C qui voit tous les candidats de E et B peut être éliminé.*

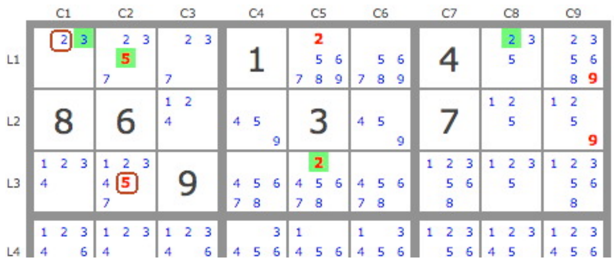
En effet, si C était solution dans sa cellule, aucun des candidats de E ne serait solution, donc P'(E) serait valide et B serait solution dans sa cellule, ce qui contredit le fait que B et C se voient. Donc C n'est pas solution dans sa cellule et peut être éliminé.

Voici quelques exemples d'utilisation de ce théorème avec les puzzles ci-dessous où les candidats de l'anti-piste sont marqués en vert.

<u>Exemple 1.</u>

E = {5r3c2, 2r1c1}. P'(E) = {5r1c2, 3r1c1, 2r1c8, 2r3c5, ... } dont le diagramme de construction est :

```
             ->3r1c1->2r1c8->2r3c5
            /         /
P'(E) : -E->5r1c2--
```

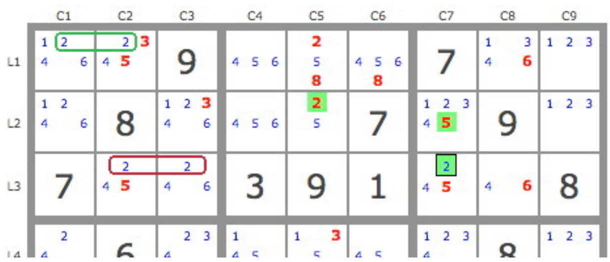


C=2r3c2 peut être éliminé parce qu'il voit à la fois les candidats de E et B=2r3c5.

<u>Example 2.</u>

E = {2r3c2, 2r3c3}. P'(E) = {2r3c7, 5r2c7, 2r2c5, 2r1c12, ... } dont le diagramme de constrcution est :

```
P'(E) : -E->2r3c7->5r2c7->2r2c5->2r1c12
          \                           /
           ------------------------
```



2r2c1 et 2r2c3 peuvent être éliminés parce qu'ils voient les deux candidats de E et 2r1c1 et 2r1c2 .

Example 3.
E = {3r2c3}. P'(3r2c3) = {3r1c2, 5r3c2, 5r2c7, 3r2c9, ...} dont le diagramme est :

```
P'(3r2c3) : -3r2c3->3r1c2->5r3c2->5r2c7->3r2C9
                    \                             /
                     -------------------------
```

Alors 3r2c7 peut être éliminé.

Un résultat du même type peut être établi en utilisant des ensembles fermés.
Un anti-piste peut contenir des sous-ensembles de candidats qui forment des ensembles fermés tels que définis ci-dessous :
Un ensemble de candidats E1={B1j, j=1.2,...} est un ensemble fermé contenu dans P'(E) quand E1 est un ensemble fermé du pseudo-puzzle associé à P'(E).

Démontrons alors le théorème suivant.

Théorème 3 :
Dans la même zone Z (bloc, ligne ou colonne), E1 et E2 étant deux ensembles distincts ayant deux composantes constitués chacune de candidats d'occurrence a et b seulement. Si l'une des conditions H1, H2 ou H3 ci-dessous est remplie, tous les candidats d’occurrence a ou b qui ne sont pas contenus dans E1UE2 peuvent être éliminés de la zone Z.
- (H1) : P'(E1) et P'(E2) sont invalides.
- (H2) : P'(E2) est invalide et E2 est un ensemble fermé contenu dans P'(E1).
- (H3) : E2 est un ensemble fermé contenu dans P'(E1) et E1 est un ensemble fermé contenu dans P'(E2).

Démonstration :

1)- Selon H1 et le théorème 1, E1 et E2 contiennent chacun un candidat solution, ainsi les deux candidats de Z d'occurrence a et b sont dans E1UE2 => élimination des candidats de Z d'occurrence a ou b qui ne sont pas dans E1UE2 .

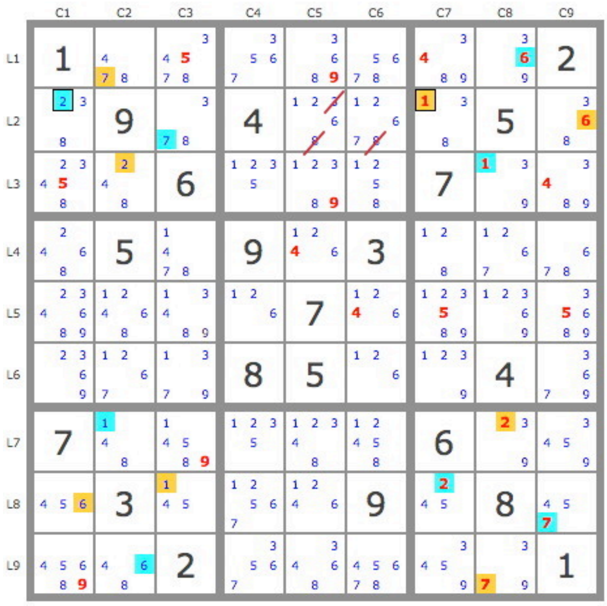
2)- Selon H2 et le théorème 1, E2 contient au moins un candidat solution et deux cas sont possibles :
- P'(E1) valide => E2 contient deux candidats solutions, dont l’un est d’occurrence a et l’autre b => élimination des candidats de Z d'occurrence a ou b qui ne sont pas dans E1UE2.
- P'(E1) invalide et on revient au cas 1) => élimination des candidats de Z d'occurrence a ou b qui ne sont pas dans E1UE2.

3- Selon H3, quatre cas sont possibles :
- P'(E1) valide => E2 contient deux candidats solutions, dont l'un est d'occurrence a et l'autre d'occurrence b => élimination des candidats de Z d'occurrence a ou b qui ne sont pas dans E1UE2.
- P'(E1) invalide ce qui conduit au cas 2) => élimination des candidats de Z d'occurrence a ou b qui ne sont pas dans E1UE2.

- Même raisonnement et même conclusion avec P'(E2) selon qu'elle est valide ou non.

Dans tous les cas possibles, H1, H2 et H3 les candidats de Z d'occurrence a ou b qui ne sont pas dans E1UE2 sont éliminés.

Voici un exemple, sur le puzzle Easter Monster, d'une application de ce théorème.
G = 1.......2.9.4...5...6...7...5.9.3.......7.......85..4.7.....6...3..9.8...2.....1
Prenons E1={38r2c1, 38r2c3} et E2={38r2c7, 38r2c9}.
P'(E1) ={2r2c1, 7r2c1, 1r7c2, 6r9c2, 2r8c7, 7r8c9, 1r3c8, 6r1c8, ...} =>E2 est un ensemble fermé contenu dans P'(E1).
P'(E2) ={1r2c7, 6r2c9, 2r7c8, 7r9c8, 1r8c3, 6r8c1, 7r1c2, 2r3c2...} => E1 est un ensemble fermé contenu dans P'(E2).
Selon le théorème 3, 38r2c5 et 8r2c6 peuvent être éliminés.



Il est entendu que le théorème s'applique également à tous les ensembles de type E1 et E2 qui constituent le Sk-loop bien connu de ce puzzle et toutes les éliminations en sont déduites.

Mais ce théorème s'applique aussi aux puzzles qui ne comptent pas la boucle SK, pour les éliminations partielles.

La notion d'anti-piste est à la base de la théorie de la TDP. Nous y reviendrons dans ce qui suit.

Partie 2

Introduction

Dans cette deuxième partie, on aborde la notion de pistes conjuguées et leurs propriétés. Certains des termes utilisés cette partie 2 ont été définis dans la partie 1, à laquelle je renvoie le lecteur.

Piste et anti-piste

La partie 1 a défini la notion d’anti-piste et les contre-composantes d'un ensemble E. Définissons maintenant la notion de piste.

Commençons par un seul candidat Ak, et désignons par A'k l'ensemble des candidats complémentaire de Ak dans la cellule de Ak.

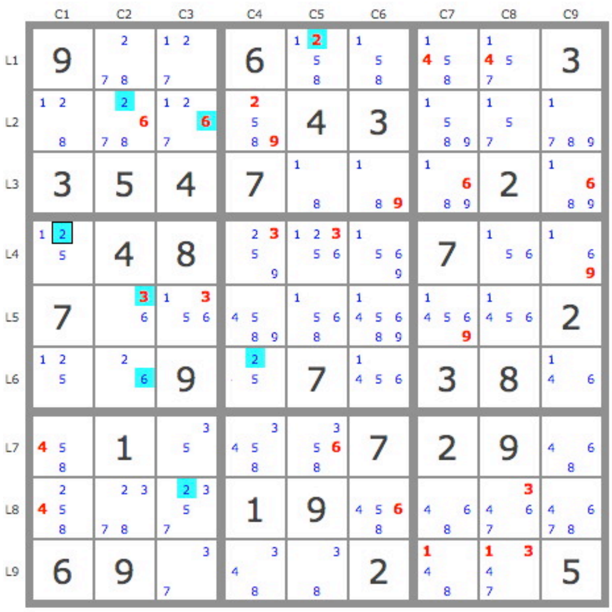
Définition :
La piste P(Ak) est l'ensemble des candidats de l'anti-piste P'(E'k), donc P(Ak)=P'(A'k).
Ce qui revient à dire que :
P(Ak)={Bj, j=1.2, ...} est l'ensemble des candidats Bj qui seraient placés avec les techniques de base (TB) comme solution de leurs cellules ***SI*** *Ak était placé comme solution dans sa cellule.*

Voici un exemple de construction d'une piste P(Ak).

Ak=2r4c1
P(2r4c1)={2r1c4, 6r6c2, 3r5c2, 6r2c3,2r6c4, 2r1c5, 2r2c2, 2r8c3...} dont le diagramme est le suivant :

```
                                   ->6r2c3
                                  /
P(2r4c1) : 2r4c1->6r6c2->3r5c2->2r6c4->2r1c5
                       \
                         ->2r6c4->2r1c5
                         \
                           ->2r8c3
```

Ce que l'on représente directement sur le puzzle par une marque de couleur, comme ci-dessous.



Définissons maintenant une piste P(E) issue d'une ensemble E.

Définition :
E ={Ak, k=1,2,...n} étant un ensemble de candidats Ai du puzzle G, une piste P(E)={Bj, j=1,2, ...} est l'ensemble des candidats Bj communs aux pistes P(Ak), c'est-à-dire obtenus par intersection des anti-pistes P(Ak), donc P(E)=∩P(Ak).
On dit que E génère P(E).

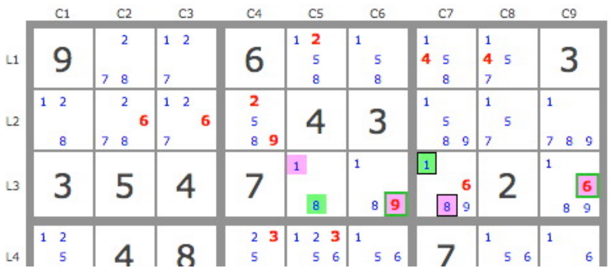
Comme pour l'anti-piste, plusieurs situations peuvent se présenter lors de la construction de P(E) :

- soit, le placement des candidats Bj rencontre une contradiction (aucun candidat Bj possible dans une cellule, deux candidats Bj dans la même zone, etc...). On dit alors que P(E) est invalide.
- soit, les candidats de P(E) sont tous des candidats solutions. On dit que P(E) est valide. Nous verrons plus tard quand cette situation se produit.
- soit, rien ne peut être conclu à ce stade sur le statut de P(E), car nous ne savons pas si P(E) est valide ou invalide.

Donnons deux exemples de construction de P(E).

Un premier exemple simple avec sur le même puzzle que précédement et E={1r3c7, 8r3c7}, également noté 18r3c7.

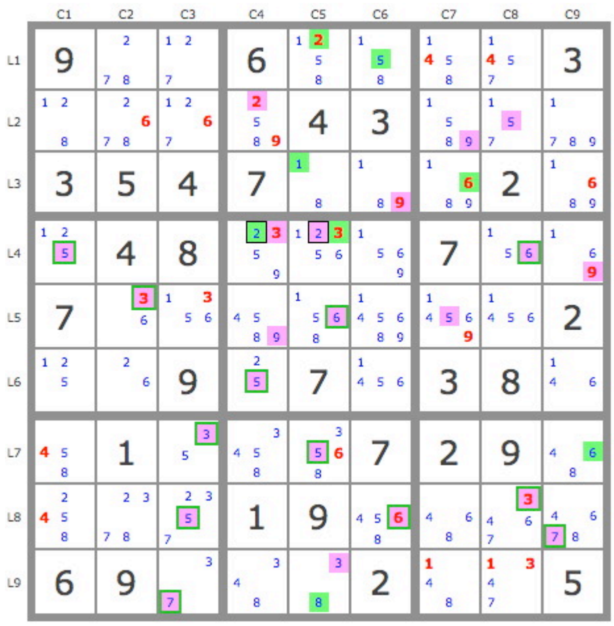
P(E) = P(1r3c7) ∩P(8r3c7) = {9r3c6, 6r3c9,...} qui est composé des candidats violets entourés de vert communs aux deux pistes P(1r3c7) marquée en vert et P(8r3c7) marquée en violet. Voir la figure ci-dessous.



Un deuxième exemple, plus complexe.

Sur le même puzzle, E={2r4c4, 2r4c5} noté aussi E=2r4c45.

P(E)=P(2r4c4) ∩P(2r4c5)={5r6c4, ...} est composée des candidats violets entourés de vert communs aux deux pistes P(2r4c4) marquée en vert et P(2r4c5) marquée en violet. Voir la figure ci-dessous.



Nous pouvons d'ores et déjà établir une propriété facile à démontrer.

Théorème 1 :
Si P(E) est invalide, alors aucun des candidats Ai de E n'est une solution dans sa cellule, donc tous les candidats de E peuvent être éliminés.

En effet :
P(E) invalide signifie que le placement des candidats Bj communs aux pistes P(Ak) dont P(E) est l'intersection rencontre une contradiction, donc chaque piste P(Ak) rencontre cette même contradiction aussi, c'est-à-dire est invalide. Comme P(Ak)=P'(A'k) où A'k est l'ensemble de candidats complémentaire de Ak dans sa cellule, les antipistes P'(A'k) sont toutes invalides => que chaque A'k contient un candidat solution (théorème 1 partie 1) => chaque Ak peut être éliminé .

Enfin, pour un ensemble E de candidats de G, il existe deux types d'ensembles de candidats générés par E, une piste P(E) et un anti-piste P'(E) qui satisfont la propriété suivante.

Propriété :
P(E) et P'(E) ne peuvent pas être désactivés simultanément.
Si P(E) est invalide => P'(E) est valide, et si P'(E) est invalide => P(E) est valide.

En effet :
si P(E) et P'(E) étaient simultanément invalides, alors selon la propriété (P2) aucun candidat de E ne serait solution et selon la propriété (P1) au moins un candidat de E serait solution, ce qui est absurde.

Pistes conjuguées

<u>Convention de language :</u>
Il conviendra alors d'écrire "piste P" pour désigner une piste ou un anti-piste lorsqu'il n'est pas nécessaire de préciser s'il s'agit d'une piste ou d'un anti-piste.

La piste P(E) et l'anti-piste P'(E) font partie d'un ensemble de paires de "pistes P" que l'on appelle "pistes conjuguées" et dont la définition est la suivante, dans laquelle les notions d'invalidité et de validité sont celles précédemment données pour les pistes et anti-pistes :

Définition :
Une piste P1 et une piste P2 sont conjuguées lorsqu'elles ne peuvent pas être invalides simultanément.
Si la piste P1 est invalide, alors la piste P2 est valide, et vice et versa.

Ainsi, P(E) et P'(E) sont conjuguées selon la propriété précédente, mais il existe d'autres paires de pistes P conjuguées comme le montre le théorème suivant :

Théorème 2 :
Soient E1 et E2 deux ensembles distincts ($E1 \cap E2 = \emptyset$) de candidats de G.
Si P'(E1UE2) est invalide, alors P(E1) et P(E2) sont conjugués.

En effet :
si P(E1) et P(E2) étaient invalides simultanément, alors aucun candidat de E1 et E2, donc de E1UE2, ne serait solution, ce qui est absurde puisque P'(E1UE2) invalide implique qu'un candidat de E1UE2 au moins est solution.

Pour ces paires de pistes conjuguées qui généralisent le couple P(E)/P'(E) nous pouvons énoncer les deux théorèmes suivants.

Théorème 3 :
P1/P2 étant une paire de pistes conjuguées, tout candidat de G qui voit à la fois un candidat de la piste P1 et un candidat de la piste P2 peut être éliminé.*
* On dit que deux candidats A et B se voient lorsqu'ils sont soit dans la même cellule, soit ont la même occurrence et se trouvent dans la même zone (ligne, colonne ou bloc).

En effet :
Soit M un candidat qui voit à la fois un candidat A de la piste P1 et un candidat B de la piste P2. Si M est solution dans sa cellule, alors A et B ne sont pas solutions => la piste P1 et la piste P2 sont invalides, ce qui est impossible. M ne peut donc pas être une solution et peut donc être éliminé.

Ce théorème a un corollaire évident qui est très utile dans la pratique et qui est le suivant :

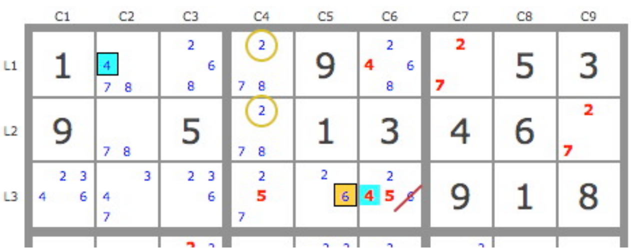
Théorème 4 :
Piste P1/piste P2 étant un couple de pistes conjuguées, tout candidat de G commun aux pistes P1 et P2 est une solution dans sa cellule.

En effet :
Dans la case de ce candidat A commune à la piste P1 et à la piste P2, tous les autres candidats de la case voient A et peuvent donc être éliminés.

Voici un exemple très simple pour illustrer ces résultats.

G=....9..5.9.5..346.......9.871.6...4...4.5.6...6...7.218.1.......574..1...2..7....

Sur le puzzle simplifié par les techniques de base (TB), on choisit :
E1={4r1c2} et E2={2r12c4}, donc E1UE2={4r1c2, 2r12c4}.
Evidemment, nous avons P'(E1UE2) invalide (rectangle interdit 78r12c24) => P(E1) et P(E2) sont des pistes conjuguées.
P(E1) ={4r1c2, 4r3c4, ...}.
P(E2)=P(2r1c4) ∩P(2r2c4) = {6r3c6, ...}.
6r3c6 peut être éliminé car il voit 6r3c5 et 4r3c6 (théorème 3).



Les pistes conjuguées sont le principal outil de résolution de TDPT puisqu'elles permettent la validation et l'élimination des candidats.

Partie 3

Introduction

Dans cette 3ème partie, on présente la notion de "pistes opposées" et les propriétés qui l'accompagnent. On renvoie le lecteur aux parties 1 et 2, qui définissent les notions de piste et d'antipiste, de validité et d'invalidité.

Il convient de rappeler que par convention, le terme "Piste P" fait référence à une piste ou à une anti-piste.

Piste opposées

Définition :
Une piste P1 et une piste P2 sont opposées lorsqu'il y a au moins un candidat de P1 qui voit un candidat de P2 et vice et versa.

Une première propriété sur les pistes opposées est la suivante :

Théorème 1 :
Deux pistes opposées ne peuvent pas être valides simultanément.
Si l'une est valide, l'autre ne l'est pas.

En effet, si les pistes P1 et P2 étaient valides, le candidat de P1 et le candidat de P2 qui se voient seraient tous deux des solutions, ce qui est impossible.

Théorème 2 :
Si une Piste Q1 est opposée à une piste P1, toute piste P2 conjuguée de la piste P1 est incluse dans la piste Q1 (piste P 2 $\subseteq$ piste Q1).

Pour démontrer ce théorème, démontrons d'abord la propriété suivante :
Si faire l'hypothèse que la piste P1 est valide => la piste P2 est valide, alors la piste P2 est incluse dans la piste P1.

En effet,
Ceci est dû au mode de construction d'une piste P.
Supposer ou affirmer qu'une piste P est valide, c'est placer les candidats de la piste sur le puzzle par les techniques de base (TB) comme s'ils étaient tous des candidats solutions.
Si placer ceux de la piste P1 nous permet aussi de dire que nous pouvons placer ceux de la piste P2, alors la piste P1 est aussi construite avec les candidats de la piste P2. Donc, la piste P2 est incluse dans la piste P1

La démonstration du théorème est alors la suivante :
Les pistes P1 et P2 étant conjuguées, faire l'hypothèse que la piste Q1 est valide => la piste P1 opposée est invalide => la piste P2 est valide , donc la piste P2 est incluse La piste Q1.

Le théorème suivant est un corollaire du théorème 2.

Théorème 3 :
Si deux pistes conjuguées Q1 et Q2 sont opposées à la même piste P1, toute piste P2 conjuguée de la piste P1 est valide.

En effet,
Si la piste Q1 et la piste Q2 sont opposées à la piste P1 => la piste P2 est incluse dans la Piste Q1 et la piste P2 est incluse dans piste Q2, puisque la piste P2 est conjuguée

avec la piste P1. Comme la pistee Q1 ou la piste Q2 est valide => la piste P2 est valide comme étant composée que de candidats solutions.

Les pistes opposées sont un outil efficace pour résoudre des énigmes difficiles en utilisant le théorème 2, plus rarement le théorème 3.

Pour illustrer cette partie, voici un exemple de résolution avec le puzzle suivant :

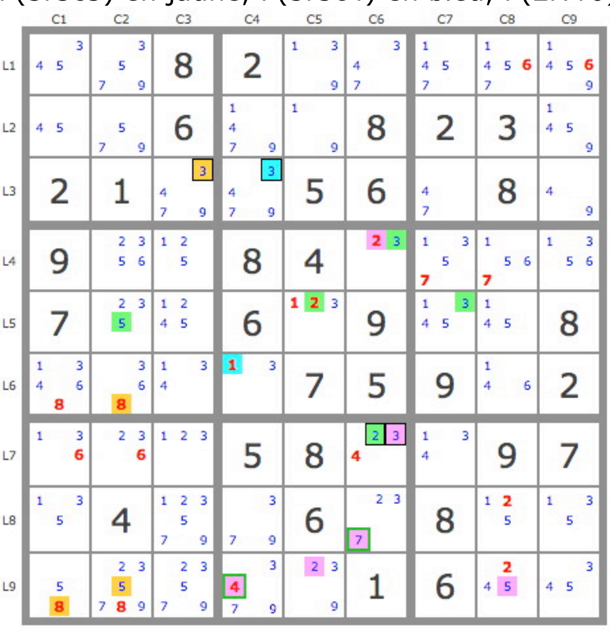
G = ..82.......6....3.21..56.8.9..84....7..6.9..8....75..2...58..97.4....8.......16..

Après avoir réduit le puzzle avec les techniques de base (TB), on choisit la paire 3r3 pour construire deux pistes conjuguées.
Les pistes P(3r3c3) et P(3r3c4) sont conjuguées car P'(3r3c34) est évidemment invalide.
P(3r3c3) ={3r3c3, 8r6c2, 5r9c2, 8r9c1,...}.
P(3r3c4) ={3r3c4, 1r6c4,...} contient l'ensemble 3r6c123.
Par conséquent, nous pouvons éliminer 3r45c3 qui voit 3r3c3 et 3r6c123.
C'est l'équivalent d'un Finned X-Wing sur les 3.

On peut aussi éliminer 3r9c1 car P(3r9c1) est invalide dans le bloc b7. C'est l'équivalent d'un ALS-XZ.
C'est pour vous montrer que nous pouvons faire avec TDP, comme avec les techniques avancées.

Mais le sujet est le théorème 2.

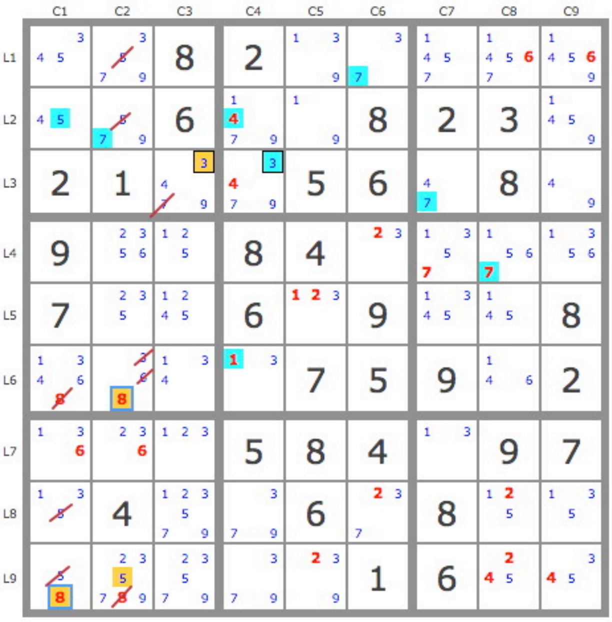
Les pistes P(3r3c3) et P(3r3c4) sont bloquées en développement. Pour déverrouiller, on considére une autre paire, celle de la cellule r7c6 avec, 4r7c6 et 23r7c6. Nécessairement P(4r7c6) ou P(23r7c6) est valide et l'autre est invalide, car ces deux pistes sont conjuguées. Alors on les contruit.
P(4r7c6)={4r7c8,...}
P(23r7c6)=P(2r7r6) ∩P(3r7r6), donc on construit séparément P(2r7r6) et P(3r7r6).
Pour faciliter l'explication, on marque toutes ces pistes avec des couleurs sur le puzzle.
P(3r3c3) en jaune, P(3r3c4) en bleu, P(2r7r6) en vert et P(3r7r6) en violet.



Comme on peut le voir, les deux pistes P(2r7r6) verte et P(3r7r6) violette sont opposées à la piste jaune P(3r3c3) par le 5. Donc selon le théorème 2, les candidats de la piste

bleue P(3r3c4) sont des candidats des pistes verte et violette, donc des candidats de la piste P(23r7c6).
Grâce à cela, je peux développer P(23r7c6) ce qui conduit à une contradiction (on vous laisser vérifier).

Donc, 23r7c6 peut être éliminé, 4r7c6 est solution dans r7c6 et la piste bleue peut être étendue comme le montre la figure suivante.
Plusieurs éliminations sont alors possibles (candidat barré en rouge) et deux candidats 8 sont des solutions.



Les pistes opposées trouvent également leur intérêt dans l'analyse d'un puzzle pour choisir les extensions d'une piste, comme cela sera défini dans la partie 4.

Part 4

Introduction

Dans cette avant-dernière partie, j'aborde la notion d'extension d'une piste.

Pour les notions mentionnées dans cette partie 4 (piste, anti-piste, pistes conjuguées, etc...) je renvoie le lecteur aux parties 1, 2 et 3.

Extension d'une piste.

Je rappelle que le terme " piste P " désigne soit une piste, soit un anti-piste.

Définition :
P et Q étant deux pistes quelconques, une PQ-piste notée P.Q est l'ensemble P.Q={Bj, j=1,2, ...} composé des candidats Bj de la piste P et de la piste Q, ainsi que de tous les candidats Bj qui seraient placés sur la grille SI les candidats de la piste P et de la piste Q étaient placés.
On dit que la piste P a été prolongée par la piste Q.

Comme pour les anti-pistes et les pistes, si la PQ-piste P.Q rencontre une contradiction elle est invalide, si elle est composée uniquement de candidats solutions elle est valide.

Définissons ensuite l'extension d'une piste P.

Définition :
- Q(E) et Q'(E) étant la piste et l'anti-piste générées par un ensemble E, P étant une piste quelconque, P.Q(E) est une extension de la piste P si P.Q'(E) est invalide.
- Q(Ei) étant les pistes générées par les composantes Ei de E, les P.Q(Ei) forment les branches de l'extension de P.

Je ne développerai pas trop ici ce concept (arbre de résolution) pour rester simple et je me contenterai d'énoncer, sans faire de démonstrations, quelques résultats pratiques.
Théorème 1 :
Soit E1 et E2 une paire d'ensembles (*) contenus dans une piste P.
Si P.Q(E1) est invalide, alors P.Q(E2) est une extension de P.

(*) Deux ensembles disjoints forment une paire d'ensembles lorsque leur réunion est constituée de tous les candidats d'une même cellule ou de tous les candidats d'une même occurrence provenant d'une même zone (ligne, colonne ou bloc).
Une paire d'ensembles contenue dans une piste P est une paire d'ensembles dont sont retirés les candidats qui voient P.

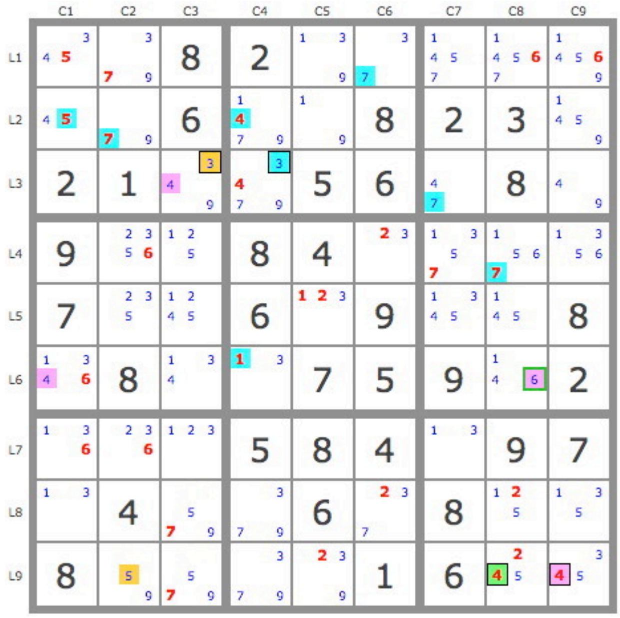
Théorème 2 :
Les pistes P1 et P2 étant conjuguées,
1) Si une extension de P1 est invalide, alors une extension de P2 est valide.
2) Si un candidat voit à la fois un candidat d'une extension de P1 et un candidat d'une extension de P2, il peut être éliminé de sa cellule.
3) Si un candidat est commun à une extension de P1 et une extension de P2, il est une solution dans sa cellule.

Ces deux théorèmes sont des outils puissants pour résoudre des puzzles difficiles.

Voici un exemple qui montre comment les utiliser.

G = ..82.......6....3.21..56.8.9..84....7..6.9..8....75..2...58..97.4....8.......16..

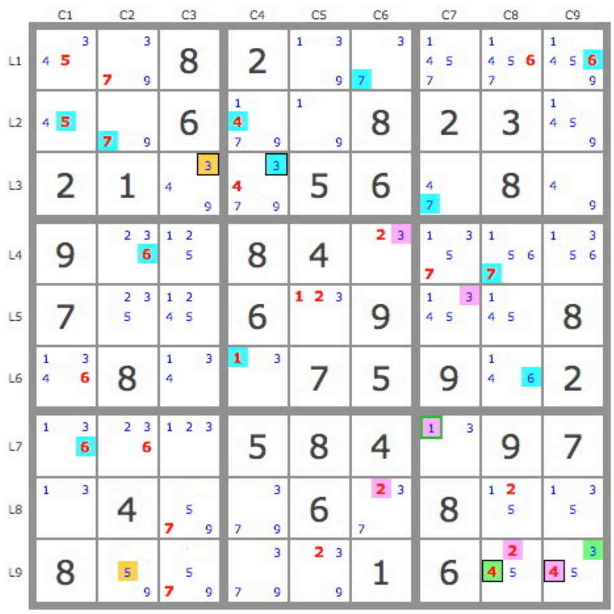
C'est la grille étudiée à titre d'exemple dans la partie 3 de TDP. Nous reprenons son étude au stade où nous l'avons laissée dans la partie 3 avec deux pistes conjuguées issues des 3r3, P(3r3c4) bleu et P(3r3c3) jaune.
Pour développer davantage la piste bleue, nous considérons son extension P(3r4c3).P(4r9c89) car P(3r4c3).P'(4r9c89) est évidemment invalide comme n'ayant aucun candidat de l'occurrence 4 dans le bloc B9.
On voit sur la figure ci-dessous que les deux branches P(3r4c3).P(4r9c8) marquée en vert et P(3r4c3).P(4r9c9) marquée en violet ont en commun le 6r6c8 qui est donc un candidat de P(3r4c3).P(4r9c89).
P(3r4c3).P(4r9c89) =P(3r4c3) U {6r6c8, 6r4c2, 6r1c9, ...}
Cela élimine le 5r4c2 qui voit la piste jaune et l'extension de la piste bleue (théorème 2).



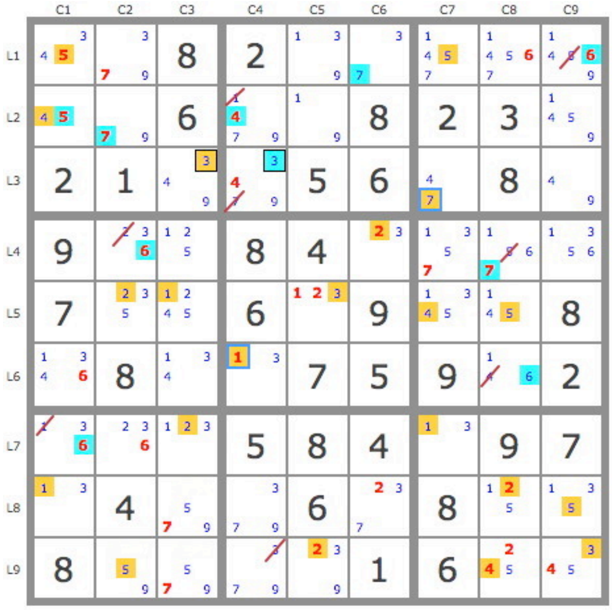
D'un point de vue pratique on trace avec la même couleur les candidats de l'extension d'une piste P dès qu'ils sont identifés.

L'objectif est ensuite de développer la piste jaune pour augmenter le nombre d'éliminations.

Considérons donc l'extension P(3r3c3).P(r9c89). On voit sur la figure suivante que ses branches verte et violette ont en commun le 1r7c7 qui est donc un candidat de l'extension, c'est à dire un candidat jaune. Cela permet d'éliminer le 1r7c1.



Mais si on regarde bien, on voit que la branche violette est invalide avec une contradiction dans r5c2, ce qui fait de la branche verte un prolongement de la piste jaune (Théorème 1), et la situation de la grille est la suivante avec une piste jaune qui se développe beaucoup et permet des éliminations et des validations :



C'est à vous de terminer cette résolution, ce qui n'est pas difficile.
D'autres exemples de résolution sont donnés dans le forum de enjoyudoku.com.

Part 5

Introduction

Je conclurai cette présentation de TDP par un paragraphe consacré à l'unicité de la solution dans les puzzles, et donc aux puzzles à solutions multiples.

Contrairement aux usages de la communauté des sudokistes, je considère que les puzzles à solutions multiples sont intéressants (pour moi) d'un point de vue théorique. Je m'y suis donc intéressé afin d'établir des propriétés des pistes qui s'appliquent à tous les puzzles 9x9 classiques.

Portée de la TDP

Les définitions, propriétés et théorèmes donnés dans les parties 1, 2 et 4 sont applicables à tous les puzzles 9x9 classiques, qu'il s'agisse de solutions simples ou multiples.

Il n'en va pas de même pour les pistes opposées (partie 3) des puzzles à solutions multiples pour lesquels, il est évident, théorème 1 ne peut plus être énoncée. Deux pistes opposées peuvent être valables et conduire à deux solutions différentes.

De plus, si nous ne sommes pas sûrs qu'un puzzle n'a qu'une seule solution et si nous utilisons à mauvais escient les pistes opposés, nous serons conduits à moins de solutions que le nombre de solutions du puzzle.

D'autre part, le théorème 2 de la partie 3 du TDP est valide mais sa démonstration doit être adaptée.

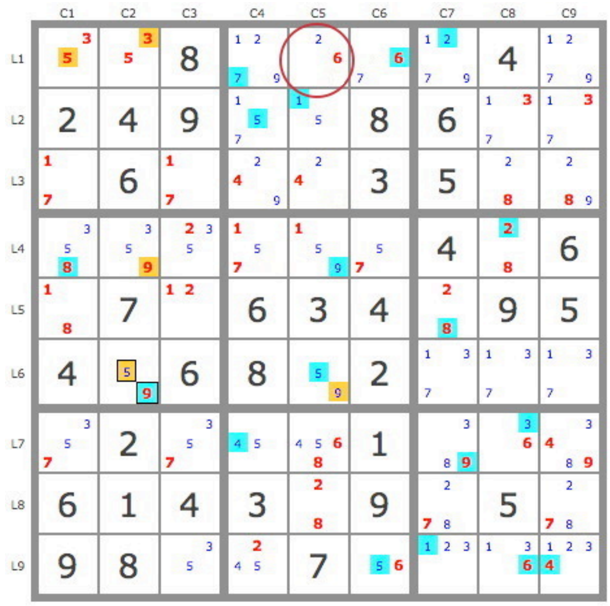
Enfin, le théorème 3 de la partie 3 doit être exprimé différemment, comme ceci :
Si deux pistes conjuguées Q1 et Q2 sont opposées à la même piste P1, toute piste conjuguée P2 de la piste P1 est composée de candidats communs à toutes les solutions S1, S2, S3, ...du puzzle, soit P2 $\subseteq \cap Si$

Unicité de la solution

Chaque fois qu'on s'occupe d'un puzzle dont on ne sait pas s'il y a une seule solution, la notion de piste opposée doit être envisagée avec prudence, au risque de ne pas voir que le puzzle a plusieurs solutions.

Il en va de même pour les méthodes qui supposent que le puzzle est un puzzle à solution unique comme le rectangle unique (UR), les BUGGs, etc. que j'appelle ici "configurations incertaines", pour deux raisons :
- Nous ne pouvons pas prouver qu'un puzzle a une solution unique en utilisant un principe qui fixe déjà le puzzle comme ayant une solution unique. C'est évident !
- Si nous utilisons une configuration incertaine dans la résolution, nous trouverons quelques solutions du puzzle, mais peut-être pas toutes.

Sur le puzzle ci-dessous par exemple, nous considérons les deux pistes conjuguées P(9r6c2) marquées en bleu et P(5r6c2) marquées en jaune.
Si nous traitons le puzzle comme ayant une seule solution et que nous considérons donc 8r4c1 comme candidat pour la piste bleue afin d'éviter UR(35r1c23-35r4c23), nous nous retrouvons avec une contradiction dans la cellule r1c5.
La piste bleue est donc invalide et la piste jaune est valide, c'est-à-dire que 9r6c2 peut être éliminée et que tous les candidats marqués en jaune sont des solutions.
Ce résultat n'est pas faux, mais en faisant cela nous ne voyons pas à ce stade de la résolution que le puzzle a en fait plusieurs solutions, et que le 9r6c2 fait partie de deux solutions possibles : S1 = 9r6c2 -> 5r1c2 -> 3r1c1 -> etc... et S2 = 9r6c2 -> 5r4c2 -> 3r1c2 -> etc...



Cela dit, on peut exploiter une configuration incertaine dans n'importe quel puzzle tant que qu'on l'utilise pour faire une extension d'une piste (voir la définition d'une extension dans TDP partie 4).
Ainsi, dans ce puzzle précédent, nous pouvons développer P(9r6c2) par les deux branches d'une extension P(9r6c2).P(8r4c1) et P(9r6c2).P'(8r4c1).
P(9r6c2).P(8r4c1) étant invalide (comme nous venons de le voir), l'extension de P(9r6c2) se fait avec P(9r6c2).P'(8r4c1) ce qui conduit aux deux solutions S1 et S2.

Cette approche a l'avantage de traiter un puzzle sans se soucier de savoir s'il a une solution unique ou non, et s'il a une solution unique, la branche d'extension obtenue avec l'UR conduira à une contradiction.

Niveau de difficulté d'un puzzle

Cette approche de l'unicité m'a conduit à établir un niveau de difficulté pour les puzzles à solution unique, appelé niveau TDP, qui est totalement différent de ceux couramment utilisés.

Définition :
La taille d'une résolution de puzzle par la TDP est égale au nombre de pistes conjuguées invalides utilisées en pratique pour résoudre le puzzle.

Par exemple, si un premier ensemble de pistes conjuguées qui réduit le puzzle a été utilisé pour résoudre un puzzle, puis un second ensemble de pistes conjuguées qui complète le puzzle, la taille de la résolution est de 2.

Un autre exemple est un puzzle très difficile qui admet un backdoor P(E).
Avec T&E on peut trouver ce backdoor, mais cela ne signifie pas que la taille de résolution est 1, son niveau de difficulté doit être établi en montrant que l'anti-porte dérobée P'(E) est invalide.

Définition :
Le niveau TDP d'un puzzle est égal à la plus petite taille de résolution possible.

Dans l'exemple ci-dessus, nous ne pouvons pas dire que le niveau TDP est 2, mais simplement qu'il est inférieur ou égal à 2.

Par exemple, il peut être établi que Easter Monster a un niveau TDP ≤ 13 et AI-Escargot a un niveau TDP ≤ 10.

Robert Mauriès
November 16, 2019