# Théorie de la technique des pistes en sudoku

**Par Robert Mauriès**

## Introduction

L'objet de ce document est de présenter et de démontrer les propriétés essentielles de la théorie globale que j'ai développé et appelée "technique des pistes", permettant de résoudre les grilles de sudoku 9x9 classiques considérées dans leur sens le plus large, à savoir qu'on ne se limite pas à des grilles à solution unique.
La suite de ce document suppose acquises de la part du lecteur les règles, les définitions et les techniques simples de résolution des grilles de sudoku. Il suppose aussi une connaissance minimum de la théorie mathématique des ensembles et de sa symbolique.

## 1. Terminologie et conventions

Précisons le sens donné à certains termes utilisés dans ce document.

- **R** désigne les ***Règles*** du sudoku, supposées connues.

- Une ***grille sudoku*** est composée de 9x9=81 cases disposées dans 9 lignes, 9 colonnes et 9 blocs de 9 cases dans certaines desquelles sont disposés, en respectant **R**, K nombres (K<81) de valeur 1 à 9, appelés des ***dévoilés***.

- Une ***zone*** (sous-entendu zone sudoku) est une ligne, une colonne ou un bloc de la grille sudoku.

- Un ***candidat*** (sous-entendu candidat potentiel) noté $\mathbf{A_i}$ est un des nombres 1, 2 … 9 pouvant être disposés dans une case de la grille sudoku qui n'est pas encore résolue en respectant **R**. Deux candidats sont différents dès lors qu'ils ne sont pas dans la même case, ou s'ils sont dans la même case n'ont pas la même valeur.
On désigne par $\mathbf{G}=\{\mathbf{A_i}$ , i=1….., N) l'ensemble de ces candidats pouvant être disposés dans les différentes cases libres de la grille, avec N<(81-K)x9.
Un candidat est repéré par sa valeur et sa position (ligne-colonne) dans la grille. Par exemple 5L2C6 désigne le candidat de valeur 5 dans la case située à l'intersection de la ligne 2 et de la colonne 6.

- ***Placer*** un candidat sur une grille est l'opération consistant à disposer ce candidat seul dans une case de la grille.

- ***Eliminer*** un candidat sur une grille est l'opération consistant à supprimer ce candidat d'une case de la grille.

- Une ***solution*** d'une grille sudoku, si elle existe, est l'ensemble $\mathbf{S_n} = \{\mathbf{A_i} \in \mathbf{G}, i=i_1, i_2, \ldots, i_p, p=81\text{-}K\}$ des candidats placés dans toutes les cases de la grille de telle manière que les règles **R** soient respectées. Une grille peut avoir une solution (**n**=1), plusieurs solutions (**n** = 1, 2, ...) ou aucune solution.

- Un ***candidat solution*** est un candidat appartenant à une $\mathbf{S_n}$.
A contrario, un ***candidat non solution*** est un candidat n'appartenant à aucune $\mathbf{S_n}$.

- Une technique de résolution est une démarche (raisonnement) logique permettant de placer ou d'éliminer des candidats sur une grille. Parmi les techniques les plus simples figurent : la recherche des candidats uniques par balayage des zones (ligne, colonne et bloc), la recherche des alignements et la recherche des ensembles fermés (doublet, triplet, quadruplet, etc).
L'ensemble de ces trois techniques constitue les **techniques de base**, en abrégé les **TB.**

**-** On désigne par $\mathbf{E}=\{\mathbf{A_k} \in \mathbf{G}, k=k_1, \ldots, k_m\}$, où $m < N$, un ensemble de candidats qui forme un sous-ensemble de l'ensemble **G**.

- Deux ensembles disjoints **E1** et **E2** forment ***une paire d'ensembles*** lorsque leur réunion est formée de tous les candidats d'une même case, ou de tous les candidats de même valeur d'une même zone.

- Deux candidats forment une ***paire***, s'ils sont les seuls à occuper une case, ou s'ils ont la même valeur et sont les seuls de cette valeur dans une zone sudoku (ligne, colonne ou bloc).

## 2. Piste et antipiste d'une grille

**Définitions 2-1 :**

*1) Une piste $P(A_k)$ issue d'un candidat $A_k$ est l'ensemble des candidats $A_i \in G$ que l'on placerait avec les TB <u>si</u> $A_k$ était placé.*

*2) Une antipiste $P'(A_k)$ issue d'un candidat $A_k$ est l'ensemble des candidats $A_i \in G$ que l'on placerait avec les TB si $A_k$ était éliminé de la grille.*
*On dit que $P'(A_k)$ est l'antipiste de la piste $P(A_k)$.*

*3) Une piste $P(E)$ issue d'un ensemble de candidats E est l'ensemble des candidats $A_i \in G$ communs à toutes les pistes issues de tous les candidats $A_k \in E$ .*
On a donc $P(E) = \bigcap_E P(A_k)$, soit $P(E) \subseteq P(A_k)\ \forall k$.

*4) Une antipiste $P'(E)$ issue d'un ensemble de candidats E est l'ensemble des candidats $A_i \in G$ que l'on placerait avec les TB si on éliminait tous les candidats $A_k \in E$ .*
*On dit que $P'(E)$ est l'antipiste de la piste $P(E)$.*

**Convention :**
P(E) et P'(E) sont l'une et l'autre des pistes au sens large, seul leur mode de construction diffère. Aussi et sauf précision expresse, sauf si la distinction des deux est nécessaire, on utilisera dans la suite le terme de "**piste P**" aussi bien pour une piste que pour une antipiste lorsque un résultat énoncé est valable pour l'une ou l'autre de ces deux catégories de pistes.

Enonçons quelques propriétés utiles pour la suite.

**Propriété 2-1 :**
*Si E est la réunion de plusieurs ensembles $E_r$, r=1,2, …p, on a :*
*- $P(E) = \bigcap_E P(E_r)$ donc $P(E) \subseteq P(E_r)\ \forall r$,*
*- $P'(E_r) \subseteq P'(E)\ \forall r$, donc $\bigcup_E P'(E_r) \subseteq P'(E)$.*

En effet, concernant la première assertion on peut écrire:
$P(E) = \bigcap_E P(A_k) = \bigcap_E (\bigcap_{Er} P(A_k)) = \bigcap_E P(E_r)$.

Concernant la seconde assertion, si un candidat $A_i$ est placé par les TB en supprimant les candidats $A_k$ de $E_r$, à fortiori $A_i$ est placé si on supprime d'autres candidats de E. Donc un candidat de $P'(E_r)$ est aussi un candidat de $P'(E)$, soit $P'(E_r) \subseteq P'(E)$.

**Propriété 2-2 :**
*Si $E1 \subseteq E2$, alors $P(E2) \subseteq P(E1)$ et $P'(E1) \subseteq P'(E2)$.*

En effet, E'1 désignant le complémentaire de E1 dans E2, on a d'après la propriété 2-1 :
- $P(E2)=P(E1)\cap P(E'1) \subseteq P(E1)$ et,
- $P'(E1) \subseteq P'(E1) \cup P'(E'1) \subseteq P'(E2)$.

**Propriété 2-3 :**
*Pour toute piste P, $\forall A_i \in P$ on a : $P(A_i) \subseteq P$.*

En effet, si $A_i \in P$ c'est que $A_i$ a été placé en utilisant les TB. En plaçant un candidat $A_k$ par les TB comme un candidat de $P(A_i)$ on ne fait que poursuivre, par définition, la construction de P. Donc $A_k \in P$ aussi. Tout candidat de $P(A_i)$ est donc un candidat de P, soit $P(A_i) \subseteq P$.

Le théorème qui suit exprime la réciprocité qui existe entre piste et antipiste issues des deux candidats d'une paire de candidats ou des deux ensembles de candidats d'une paire d'ensembles.

**Théorème 2-1 :**
*Si E1 et E2 forment une paire d'ensembles, la piste P(E1) issue de E1 et identique à l'antipiste P'(E2) issue de E2, et réciproquement.*
*En particulier, si deux candidats forment une paire, la piste issue de l'un et identique à l'antipiste issue de l'autre.*

En effet, l'antipiste P'(E2) est construite par les TB en supposant que les candidats de E2 sont éliminés, donc que seuls les candidats de E1 subsistent puisque E1 et E2 forment une paire d'ensembles.
Comme un des candidats $A_k$ de E1 doit être placé pour respectre R, on peut dire que P'(E2) contient un des $A_k$ de E1, donc que pour ce $A_k$ on a $P(A_k) \subseteq P'(E2)$, donc que $P(E1) \subseteq P(A_k) \subseteq P'(E2)$.
Inversement, $A_1$, $A_2$, … $A_p$, étant les candidats formant E1, on peut écrire : $P'(E1 \cup E2 - A_k) = P(A_k)\ \ \forall k$, puisque seul $A_k$ subsiste dans la case ou la zone contenant la paire d'ensembles.
Or, comme $E2 \subseteq (E1 \cup E2 - A_k)$ on a $P'(E2) \subseteq P'(E1 \cup E2 - A_k)\ \forall k$, soit $P'(E2) \subseteq P(A_k)\ \ \forall k$, donc $P'(E2) \subseteq \bigcap_k P(A_k)=P(E1)$.
En rassemblant les deux inclusions inverses on a : $P(E1)= P'(E2)$, et en inversant les rôles de E1 et E2, $P(E2)= P'(E1)$.

Le cas d'une paire de deux candidats étant un cas particulier où E1 et E2 sont réduits à un seul candidat est établit aussi.

Pour finir ce paragraphe, attirons l'attention sur deux aspects importants de la construction d'une piste.

**Remarques importantes :**

- La construction d'une piste, c'est à dire l'identification par les TB des candidats qui la composent, pouvant être abordée de plusieurs manières différentes, il n'est pas exclu qu'une piste se compose finalement de plusieurs candidats d'une même case, ou/et de plusieurs candidats de même valeur d'une même zone.
Par exemple, sur la grille partielle ci-dessous, des candidats de la piste P(1L3C5) sont marqués d'un carré bleu. Selon qu'on construit la piste en suivant les flèches vers la gauche ou vers la droite, on déduit que 1L1C1 et 1L1C9 sont des candidats de P.

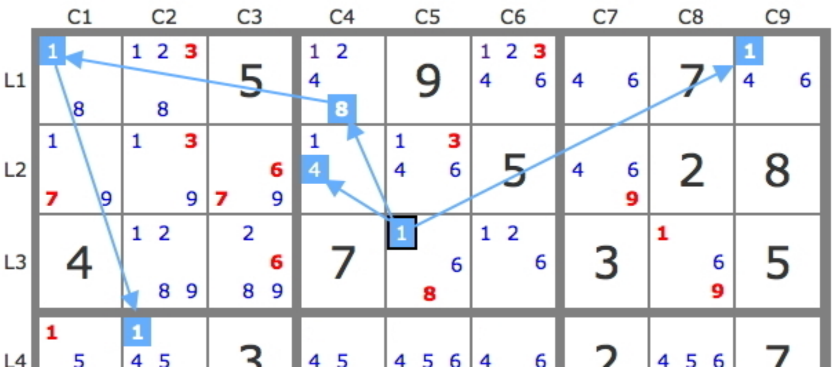

**Fig 1 : Tracé partiel de la piste P(1L3C5)**

Dans ce cas il est claire qu'une telle piste ne peut pas représenter une solution de la grille puisqu'au final elle est incompatible avec R**,** mais il s'agit bien d'une piste correctement construite.

- Au plan pratique, une piste P est représentée par un marquage graphique sur la grille (couleur ou symbole) comme sur la figure ci-dessus, mais les TB étant parfois insuffisantes pour identifier tous les candidats possibles de la piste, la construction de celle-ci est bloquée. Ce n'est pas pour autant que la piste P se limite à ces quelques candidats, elle est composée aussi des candidats futurs, non encore identifiés, qui seront trouvés au fur et à mesure de la résolution de la grille. Une piste P est donc formée des candidats identifiés et non encore identifiés.

Cela nous conduit aux définitions et propriétés du paragraphe suivant.

## 3. Validité et Invalidité d’une piste ou d'une antipiste

**Définitions 3-1 :**
*1) Une piste P est valide, si et seulement si, P n'est composée que de candidats solutions.*
*2) Une piste P est invalide lorsque le placement des candidats qui la composent conduit à une incompatibilité avec R, c’est à dire que la piste P a plusieurs (ou aucun) candidats dans une case ou plusieurs (ou aucun) candidats de même valeur dans une zone.*
*On dira que P est R-incompatible.*

**Attention :**
La notion de validité reposant par définition sur celle de candidat solution, cela suppose implicitement que la grille a au moins une solution lorsqu'on évoque la notion de validité**.** Ce qui n'est pas le cas de l'invalidité.
Ainsi dans le cas d’une grille qui n’a pas de solution, aucune piste ne peut être valide, en conséquence toutes les pistes que l’on peut construire sont forcément invalides et réciproquement.

<u>Pour la suite de ce document, nous supposons sauf mention contraire que les grilles ont au moins une solution</u>.

**Définitions 3-2:**
*- Une piste est $S_n$-valide, si et seulement si, $P \subseteq S_n$.*
*- Une piste est $S_n$-invalide, si et seulement si, $P \not\subseteq S_n$.*

Etablissons quelques propriétés utiles pour les démonstrations du chapitre 4 consacré aux pistes conjuguées.

**Propriété 3-1 :**
*Pour toute piste P on peut énoncer que :*
*- P est valide, si et seulement si, $\exists\, S_n$ telle que P est $S_n$-valide.*
*- P est invalide, si et seulement si, $\forall\, S_n$ P est $S_n$-invalide.*

En effet,
- si une piste P est valide, P n'est composée que de candidats solutions qui par définition et construction de P sont les candidats d’une même solution. Il existe donc une solution $S_n$ telle que $P \subseteq S_n$, c’est-à-dire que P est $S_n$-valide. Inversement, si $\exists\, S_n$ telle que P est $S_n$-valide alors $P \subseteq S_n$ et P n'est composée que de candidats solutions, P est donc valide par définition.

- si une piste P est invalide et si pour une $S_n$ on avait $P \subseteq S_n$, les candidats de P étant des candidats de $S_n$, cela signifierait que $S_n$ a plusieurs candidats (ou aucun) dans une case ou dans une zone, ce qui par définition est impossible pour une solution. Donc, si une piste est invalide on a $P \not\subseteq S_n$ $\forall S_n$ , c'est-à-dire que P est $S_n$-invalide $\forall S_n$. Inversement, si $\forall S_n$ P est $S_n$-invalide, alors $P \not\subseteq S_n$ $\forall S_n$ et P ne peut pas être valide car, ce serait une contradiction, P valide entrainerait qu'il existe au moins une $S_n$ telle que $P \subseteq S_n$. Donc P est invalide.

**Remarques :**
- La notion de validité est, comme l'indique la propriété 3-1, attachée à une solution $S_n$. Une piste valide est $S_n$-valide. Une grille ayant plusieurs solutions peut donc avoir plusieurs pistes valides différentes.
- Au contraire, la notion d'invalidité n'est attachée à aucune solution, une piste invalide étant $S_n$-invalide pour toutes les solutions $S_n$.

**Propriété 3-2 :**
*Une piste P est forcément $S_n$-valide ou $S_n$-invalide, mais ne peut pas être les deux à la fois, elle a donc l'un ou l'autre des deux statuts.*

En effet, cela résulte du faite qu'une piste ne peut pas à la fois être telle que $P \subseteq S_n$ et $P \not\subseteq S_n$.

**Propriété 3-3 :**
*Soient deux pistes P1 et P2 telles que $P1 \subseteq P2$, alors :*
*- Si P2 est $S_n$-valide, alors P1 est $S_n$-valide.*
*- Si P1 est $S_n$-invalide, alors P2 est $S_n$-invalide.*
*- Si P1 est invalide, alors P2 est invalide.*

En effet,
- La piste P2 étant $S_n$-valide, nous pouvons écrire que $P1 \subseteq P2 \subseteq S_n$ , soit $P1 \subseteq S_n$, donc la piste P1 est $S_n$-valide.
- La piste P1 étant $S_n$-invalide, si P2 était $S_n$-valide nous en déduirions que la piste P1 est aussi $S_n$-valide, ce qui est impossible (propriété 3-2). Donc P2 est $S_n$-invalide.
- La piste P1 étant invalide, elle est $S_n$-invalide $\forall S_n$, donc P2 est $S_n$-invalide $\forall S_n$ aussi, c'est-à-dire est invalide.

**Propriété 3-4 :**
*$P(A_k)$ étant une piste issue d'un candidat $A_k$ :*
*- $P(A_k)$ est $S_n$-valide, si et seulement si, $A_k \in S_n$.*
*- $P(A_k)$ est $S_n$-invalide, si et seulement si, $A_k$ n'appartient pas à $S_n$.*
*- $P(A_k)$ est invalide, si et seulement si, $A_k$ n'appartient à aucune $S_n$.*

En effet,
- si $P(A_k)$ est $S_n$-valide alors $P(A_k) \subseteq S_n$. $A_k$ étant par construction un candidat de $P(A_k)$, on a $A_k \in S_n$. Inversement, si $A_k \in S_n$, tous les candidats de $P(A_k)$ sont des candidats solutions appartenant à $S_n$ par définition et construction de P, donc $P(A_k) \subseteq S_n$ , c'est-à-dire que $P(A_k)$ est $S_n$-valide.
- $P(A_k)$ étant $S_n$-invalide, si $A_k$ appartenait à $S_n$ alors $P(A_k)$ serait aussi $S_n$-valide, ce qui est impossible (propriété 3-2). Donc $A_k$ n'appartient pas à $S_n$. Inversement, si $A_k$ n'appartient pas à $S_n$ et si $P(A_k)$ était $S_n$-valide nous en déduirions que $A_k \in S_n$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $A_k$ n'appartenient pas à $S_n$. Donc $P(A_k)$ est $S_n$-invalide.
- si $P(A_k)$ est invalide alors $P(A_k)$ est $S_n$-invalide $\forall$ $S_n$ et donc $A_k$ n'appartient à aucune $S_n$. Inversement, si $A_k$ n'appartient à aucune $S_n$ $P(A_k)$ était $S_n$-invalide $\forall$ $S_n$ , c'est à dire que $P(A_k)$ est invalide.

**Propriété 3-5 :**
*P(E) étant une piste issue d'un ensemble de candidats E :*
*- si un $A_k \in E$ est un candidat solution $\in S_n$, alors P(E) est $S_n$-valide.*
*- si P(E) est $S_n$-invalide, alors $\forall A_k \in E$, $A_k$ n'appartient pas à $S_n$.*
*- si P(E) est invalide, alors $\forall A_k \in E$, $A_k$ n'appartient à aucune $S_n$.*

En effet :
- Si un candidat $A_k \in$ E est un candidat solution $\in S_n$, la piste $P(A_{\mathbf{k}})$ est une piste $S_n$-valide. Comme $P(E) \subseteq P(A_{\mathbf{k}}) \subseteq S_n$, P(E) est $S_n$-valide.
- P(E) étant $S_n$-invalide, si $A_{\mathbf{k}} \in$ E était un candidat solution $\in S_n$, la piste $P(A_{\mathbf{k}})$ serait $S_n$-valide. Comme $P(E) \subseteq P(A_{\mathbf{k}}) \subseteq S_n$, P(E) serait aussi $S_n$-valide, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse P(E) est $S_n$-invalide (propriété 3-2). Donc $\forall A_k \in$ E, $A_k$ n'appartient pas à $S_n$.
- P(E) étant invalide, P(E) est $S_n$-invalide $\forall S_n$, donc $\forall A_k \in$ E, $A_k$ n'appartient pas à $S_n$ et ce $\forall S_n$ d'après l'assertion précédente.

**Propriété 3-6:**
*$P'(A_k)$ étant une antipiste issue d'un candidat $A_k$ :*
*- si $P'(A_k)$ est $S_n$-invalide, alors $A_k$ est un candidat solution $\in S_n$.*
*- si $P'(A_k)$ est invalide, alors $A_k$ est un candidat $\in S_n$ $\forall S_n$.*
*- si $A_k$ n'appartient pas à $S_n$ , alors $P'(A_k)$ est $S_n$-valide.*

En effet, E étant le complémentaire de $A_{\mathbf{k}}$ dans la case contenant $A_{\mathbf{k}}$, on a $P'(A_{\mathbf{k}})$=P(E) d'après le théorème 2-1.

- Si P'($A_k$) est $S_n$-invalide, P(E) l'est aussi et aucun des candidats de E n'appartient à $S_n$. $S_n$ ayant forcément un candidat solution dans chaque case c'est $A_k$ qui est le candidat solution $\in S_n$.
- Si P'($A_k$) est invalide, alors P'($A_k$) est $S_n$-invalide $\forall S_n$ et $A_k$ est un candidat solution $\in S_n$ $\forall S_n$.
- Si $A_k$ n'appartient pas à $S_n$ , $S_n$ ayant forcément un candidat solution dans chaque case, c'est un des candidats de E qui est candidat solution $\in S_n$, c'est-à-dire que P(E) est $S_n$-valide, donc P'($A_k$)=P(E) est $S_n$-valide.

**Propriété 3-7:**
*P'(E) étant une antipiste issue d'un ensemble de candidats E :*
*- si P'(E) est $S_n$-invalide, alors un $A_k \in E$ au moins est un candidat solution $\in S_n$.*
*- si P'(E) est invalide, alors pour chaque $S_n$, un $A_k \in E$ au moins est un candidat solution $\in S_n$.*
*- si $\forall A_k \in E$, $A_k$ n'appartient pas à $S_n$ , P'(E) est $S_n$-valide.*

En effet :
- si P'(E) est $S_n$-invalide, cela signifie que la suppression des candidats de E conduit à une incompatibilité avec R. Comme la grille a au moins $S_n$ comme solution, c'est que un candidat de E au moins est un candidat solution $\in S_n$.
- si P'(E) est invalide, P'(E) est $S_n$-invalide $\forall S_n$ et d'après l'assertion précédente E a au moins un candidat $\in S_n$ et ce pour chaque $\in S_n$.
- $A_k$ n'appartant pas à $S_n$ $\forall A_k \in E$, si P'(E) était $S_n$-invalide nous en déduirions d'après la première assertion de cette propriété qu'il existe un $A_k \in E$ tel que $A_k \in S_n$ , ce qui contradictoire avec l'hypothèse $A_k$ n'appartant pas à $S_n$ $\forall A_k \in E$. P'(E) est donc $S_n$-valide.

**Conséquences pratiques** :

Une conséquence pratique des propriétés 3-4 et 3-5 pour la résolution des grilles est que si P(E) est invalide, on peut éliminer de la grille tous les candidats de E, ou si P($A_k$) est invalide on peut éliminer $A_k$.

Une conséquence pratique de la propriété 3-6 est qu'un candidat $A_k$ peut être placer sur la grille comme seule solution de sa case si P'($A_k$) est invalide.

La propriété 3-8 qui suit exprime la dualité existant entre piste et antipiste issues d'un même ensemble E.

**Propriété 3-8 : (dualité piste-antipiste):**
*La piste P(E) et son antipiste P'(E) ne peuvent pas être simultanément invalide :*
*si P(E) est invalide, P'(E) est $S_n$-valide ∀ $S_n$, et réciproquement,*
*si P'(E) est invalide, P(E) est $S_n$-valide ∀ $S_n$.*

En effet cela résulte des propriétés 3-5 et 3-7:
- Si P(E) est invalide, alors ∀$A_k$∈E, $A_k$ n'appartient à aucune $S_n$, donc l'antipiste P'(E) est $S_n$-valide ∀ $S_n$.
- Si P'(E) est invalide, alors pour chaque $S_n$, un $A_k$ ∈ E au moins est un candidat solution∈ $S_n$, donc P(E) est $S_n$-valide et ce ∀ $S_n$.

Ce résultat est fondamental pour la résolution des grilles comme l'est aussi celui de la propriété 3-9 suivante établissant une autre forme de dualité.

**Propriété 3-9 : (dualité de deux ensembles):**
*E étant la réunion de deux ensembles E1 et E2 distincts, si P'(E) est invalide, alors les pistes P(E1) et P(E2) ne peuvent pas être simultanément invalide :*
*si P(E1) est invalide, P(E2) est $S_n$-valide ∀ $S_n$, et réciproquement,*
*si P(E2) est invalide, P(E1) est $S_n$-valide ∀ $S_n$.*

En effet : L'hypothèse P'(E) invalide signifie que P'(E) est $S_n$-invalide ∀ $S_n$, donc que pour chaque $S_n$ un candidat $A_k$ de E au moins est un candidat solution appartenant à $S_n$.
- Si P(E1) est invalide, alors ∀$A_k$∈E1 $A_k$ n'appartient à aucune $S_n$, c'est donc que pour chaque $S_n$ un au moins des candidats de E2 est un candidat solution ∈ $S_n$, donc P(E2) est $S_n$-valide et ce ∀ $S_n$ .
- Si P(E2) est invalide, alors ∀$A_k$∈E2 $A_k$ n'appartient à aucune $S_n$, c'est donc que pour chaque $S_n$ un au moins des candidats de E1 est un candidat solution ∈ $S_n$, donc P(E1) est $S_n$-valide et ce ∀ $S_n$ .

**A noter** que si E1 et E2 doivent être distincts, c'est à dire ne pas être composés rigoureusement des mêmes candidats, ils ne doivent pas être nécessairement disjoints.

Les pistes qui satisfont l'une ou l'autre des deux propriétés précédentes jouent un rôle déterminant dans la résolution des grilles. Elles font partie d'une famille de pistes que l'on qualifie de pistes conjuguées , faisant l'objet du chapitre suivant.

## 4. Pistes conjuguées

**Définition 4-1 :**
*Deux pistes P1 et P2 sont conjuguées lorsque la $S_n$-invalidité de l'une impose la $S_n$-validité de l'autre et réciproquement, soit :*
*- si P1 $S_n$-invalide, alors P2 $S_n$-valide, et,*
*- si P2 $S_n$-invalide, alors P1 $S_n$-valide.*
*Deux pistes conjuguées forment un jeu de pistes.*

Une conséquence de cette définition est que deux pistes conjuguées peuvent être toutes deux valides, circonstance que l'on rencontre nécessairement dans les grilles à solutions multiples, mais aussi dans les grilles à solution unique.
La propriété suivante précise ce qu'il en est de leurs invalidités respectives.

**Propriété 4-1:**
*Deux pistes conjuguées ne peuvent pas être simultanément $S_n$-invalides, ni simultanément invalides.*

En effet,
- si P1 conjuguée de P2 (resp. P2 conjuguée de P1) est $S_n$-invalide, alors P2 (resp.P1) est par définition $S_n$-valide et ne peut donc (propriété 3-2) pas être $S_n$-invalide. P1 et P2 ne peuvent donc pas être simultanément $S_n$-invalides.
- si P1 et P2 conjuguées étaient simultanément invalides, nous pourrions écrire que P1 $\not\subset S_n$ et P2 $\not\subset S_n$ donc que P1 et P2 seraient simultanément $S_n$-invalides, ce qui est impossible. P1 et P2 ne peuvent donc pas être simultanément invalides.

Les deux théorèmes suivant, qu'il faut rapprocher des propriétés 3-8 et 3-9, permettent de trouver au plan pratique la plupart des pistes conjuguées.

**Théorème 4-1 :**
*Une piste P(E) et son antipiste P'(E) sont des pistes conjuguées.*

En effet, en combinant les propriétés 3-5 et 3-7, on peut dire que :
- si P(E) est $S_n$-invalide, alors $\forall A_k \in E$, $A_k$ n'appartient pas à $S_n$ et donc P'(E) est $S_n$-valide.
- si P'(E) est $S_n$-invalide, alors $\forall A_k \in E$, $A_k$ n'appartient pas à $S_n$ et donc P(E) est $S_n$-valide.

**Théorème 4-2 :**
*E étant la réunion de deux ensembles E1 et E2 distincts, si P'(E) est invalide, alors les pistes P(E1) et P(E2) sont conjuguées.*

En effet : L'hypothèse P'(E) invalide signifie que P'(E) est $S_n$-invalide $\forall$ $S_n$, donc que pour chaque $S_n$ un candidat $A_k$ de E au moins est un candidat solution appartenant à $S_n$.
- Si P(E1) est $S_n$-invalide, alors $\forall A_k \in E1$ $A_k$ n'appartient pas à $S_n$, c'est donc que un au moins des candidats de E2 est un candidat solution $\in$ $S_n$, donc P(E2) est $S_n$-valide.
- Si P(E2) est $S_n$-invalide, alors $\forall A_k \in E1$ $A_k$ n'appartient pas à $S_n$, c'est donc que un au moins des candidats de E1 est un candidat solution $\in$ $S_n$, donc P(E1) est $S_n$-valide.

Les pistes conjuguées jouissent des propriétés d'interactions suivantes qui sont des outils efficaces de résolutions des grilles sudoku.

**Propriété 4-1 (dualité):**
*Si une piste P1 est invalide, tous les candidats d'une piste P2 conjuguée de P1 sont des candidats solutions communs à toutes les solutions de la grille.*

En effet, si P1 est invalide alors P1 est $S_n$-invalide $\forall S_n$. Si P2 est une piste conjuguée de P1 alors P2 est $S_n$-valide et ce $\forall S_n$ , ses candidats sont donc des candidats solutions communs à toutes les solutions.

**Propriété 4-2 (validation) :**
*Un candidat commun à deux pistes conjuguées est un candidat solution commun à toutes les solutions de la grille.*

En effet, soit $A_k$ un candidat commun à deux pistes conjuguées P1 et P2. Si pour une $S_n$ au moins $A_k$ n'appartenait à $S_n$, P($A_k$) serait $S_n$-invalide et par conséquent, puis que P($A_k$) $\subseteq$ P1 et P($A_k$) $\subseteq$ P2, P1 et P2 seraient toutes deux $S_n$-invalides, ce qui est impossible d'après la propriété 4-1. Donc $\forall S_n$, $A_k$ appartient à $S_n$.

Pour établir la troisième propriété d'interaction, rappelons les définitions suivantes.

**Définitions:**
*- On dit qu'un candidat $A_\mathbf{i}$ voit un candidat différent $A_\mathbf{r}$ lorsque les deux candidats $A_\mathbf{i}$ et $A_\mathbf{r}$ sont dans la même case, ou ont la même valeur et sont dans la même zone.*
*- On dit qu'un candidat voit une piste P lorsqu'il voit un candidat faisant partie de la piste P.*

**Propriété 4-2 (élimination) :**
*Un candidat qui voit deux pistes conjuguées n'est pas, $\forall S_n$ , un candidat solution de $S_n$ et peut être éliminé de la grille.*

Soient P1 et P2 les deux pistes conjuguées, et $A_\mathbf{n}$ un candidat qui voit P1 et P2. $A_\mathbf{n}$ voit donc un candidat $A_\mathbf{i}$ de P1 et un candidat $A_\mathbf{r}$ de P2
Si $A_\mathbf{n}$ était un candidat solution $\in S_n$, $A_\mathbf{i}$ et $A_\mathbf{r}$ ne seraient pas des candidats $\in S_n$ en vertu des règles R, donc P($A_\mathbf{i}$) et P($A_\mathbf{r}$) ainsi que P1 et P2 (propriété 3-3) seraient toutes deux $S_n$-invalides, ce qui est impossible (propriété 4-1). Donc $A_\mathbf{n}$ n'est pas un candidat solution de $S_n$ et ce $\forall S_n$ , il peut donc être éliminé de la grille.

Avant de donner au paragraphe 6 un exemple d'application de ces propriétés, expliquons ce qu'est une trace d'une piste P.

## 5. Trace d'une piste

Comme cela a été indiqué au paragraphe 2, une piste peut avoir plusieurs (ou aucun) candidats dans une case ou plusieurs (ou aucun) candidats de même valeur dans une zone. Dès que cette situation se présente lors de la construction de cette piste, il est inutile d'un point de vue pratique de poursuivre son développement puisqu'elle est invalide et que tous les candidats d'une piste conjuguée de celle-ci sont des candidats solutions (propriété 4-1).
Par ailleurs, une piste peut être bloquée dans son développement avec les TB, si bien qu'elle n'est représentée que par quelques candidats identifiés.
D'où la notion de "trace d'une piste" selon la définition suivante.

**Définition 5-1:**
*Une trace d'une piste P, noté $\underline{P}$ , est l'ensemble des candidats appartenant à P que l'on identifie avec les TB sans que leur disposition sur la grille ne contredise les règles R.*

Par exemple sur la grille de la figure précédente (paragraphe 2), alors que la piste P(1L3C5) comprend les candidats 1L1C1, 1L1C9 et 1L4C2, une trace $\underline{P1}$(1L3C5) est composée des mêmes candidats que

ceux de P(1L3C5) à l'exception du 1L1C9, et une autre trace P2(1L3C5) est composée des mêmes candidats que ceux de P(1L3C5) à l'exception du 1L1C1 et du 1L4C2.
Une piste peut donc avoir, à l'instar de cet exemple, plusieurs trace distinctes.

**En pratique** donc, bien que ce ne soit que les traces des pistes que l'on trace sur une grille, par facilité de langage on confond parfois une piste avec sa trace et on identifie P et P.

Par ailleurs cette notion trouvera son utilité au paragraphe 8 avec la notion de bifurcation d'une piste.

## 6. Application

L'application de ces propriétés est un outil puissant de résolution des grilles sudoku, car il est toujours possible de construire des pistes conjuguées sur une grille.

Une piste P est généralement représentée par seulement quelques candidats et se contruit pas à pas en utilisant les TB et les propriétés de validation ou d'éliminations obtenues par interaction avec une autre piste conjuguée.

En pratique, les candidats d'une piste peuvent être marqués sur la grille par des symboles (. / *) ou des couleurs comme dans l'exemple qui suit.

Sur la grille à solution unique de la figure ci-dessous que l'on ne peut pas résoudre avec les seules TB, on choisit E={2L7C9, 3L8C1, 9L8C1}.
L'antipiste P'(E) est marquée avec la couleur verte. Elle est construite partiellement en supposant que les 3 candidats de E sont éliminés.
La piste P(E) issue de E comprend les candidats communs de la piste bleue issue du 2L7C9 et de la piste jaune issue de l'ensemble {3L8C1, 9L8C1} qui forme un ensemble fermé (doublet) jaune avec la paire {3L8C9, 9L8C9}. P(E) est donc formée partiellement de tous les candidats jaune entourés d'un carré bleu.
L'interaction de ces trois pistes permet donc d'éliminer tous les candidats barrés d'un trait rouge car ils voient à la fois P(E) et P'(E) qui sont conjuguées.

Mais si on poursuit la construction de l'antipiste P'(E) on aboutit à son invalidité (affirmation laissée à votre vérification), ce qui par conséquent rend la piste P(E) valide. Tous les candidats de P(E), c'est à dire tous les candidats jaunes entourés d'un trait bleu, sont solutions de la grille qui se termine alors facilement par les TB.

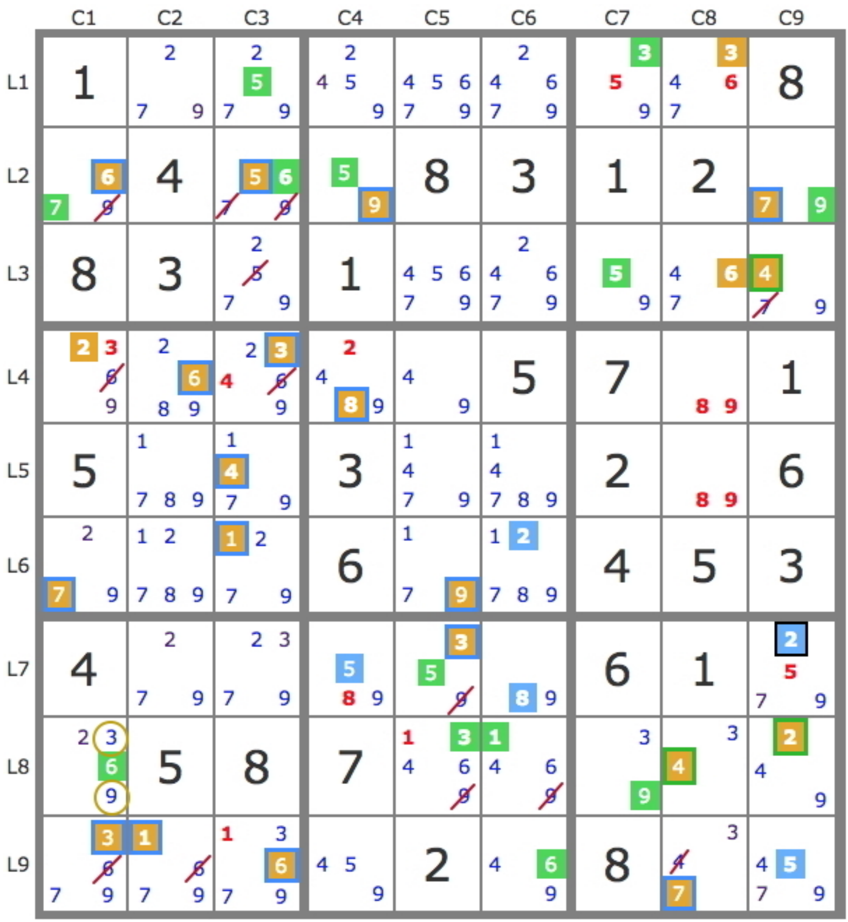

**Fig 2 : croisements piste et antipiste**

## 6. Pistes conjuguées et pistes opposées

Avant de définir la notion de pistes opposées, énonçons une propriété relative à la validité des pistes qui sera utile pour les démonstrations des propriétés attachées aux pistes opposées.

**Propriété 6-1:**
*Si faire l'hypothèse P1 est $S_n$-valide entraîne que P2 est $S_n$-valide, alors P2 $\subseteq$ P1.*

Ce résultat provient du mode de construction d'une piste. Supposer (hypothèse) ou constater qu'une piste est $S_n$-valide revient à placer les candidats de la piste sur la grille par les TB comme si ils étaient tous des candidats solutions de $S_n$ (voir définition d'une piste). Si de placer ceux de P1 permet de dire aussi que l'on peut placer ceux de P2, alors c'est que P1 se construit aussi avec les candidats de P2. Donc P2 $\subseteq$ P1.

**Définition 6-1 :**
*Deux pistes Q1 et P1 sont opposées lorsqu'un candidat de Q1 voit un candidat de P1 et réciproquement.*

A noter qu'en général deux pistes opposées ne sont pas forcément conjuguées car elles peuvent être toutes deux invalides.

**Propriété 6-2:**
*Deux pistes Q1 et P1 opposées ne peuvent pas être toutes les deux $S_n$-valides.*

En effet, soient $A_\mathbf{i}$ et $A_\mathbf{r}$ deux candidats respectifs de Q1 et P1 qui se voient. Si Q1 et P1 étaient $S_n$-valide, les candidats de Q1 et de P1 étant tous des candidats de $S_n$ , $A_\mathbf{i}$ et $A_\mathbf{r}$ seraient des candidats de $S_n$. $S_n$ serait dans ce cas une solution qui contient deux candidats $A_\mathbf{i}$ et $A_\mathbf{r}$ qui se voient (même case ou même valeur dans une zone), ce qui est impossible, une solution n'ayant qu'un candidat par case ou un seul candidat de même valeur par zone. Q1 et P1 ne peuvent donc pas être $S_\mathbf{k}$-valides toutes les deux.

A noter, que dans une grille à solutions multiples, donc ayant plusieurs solutions, deux pistes peuvent être valides et opposées, mais elles ne seront pas valides pour la même solution. Autant dire que cette propriété doit être utilisée avec précaution sur ce genre de grille.

**Théorème 6-1 :**
*Si Q1 est une piste opposée à une piste P1, toute piste P2 conjuguée de P1 est incluse dans Q1 (P2 $\subseteq$ Q1).*

En effet, P1 et P2 étant conjuguée, $\forall S_n$ une des deux pistes est $S_{\mathbf{n}}$-valide.
Si Q1 est $S_n$-valide, alors P1 qui lui est opposée ne peut pas être $S_n$-valide, c'est donc P2 qui est $S_n$-valide. Ainsi, faire l'hypothèse "Q1 est $S_n$-valide " entraînant " $S_n$-valide " , ce $\forall S_n$, on a donc P2 $\subseteq$ Q1 d'après la propriété 6-1.

**Corollaire 6-1-1 :**
*Si deux pistes conjuguées Q1 et Q2 sont opposées à une même piste P1, toute piste P2 conjuguée de P1 est $S_n$-valide $\forall$ $S_n$.*

En effet,
Si Q1 et Q2 sont opposées à P1, pour une piste P2 conjuguée de P1 on a d'après le théorème 6-1 : P2 $\subseteq$ Q1 et P2 $\subseteq$ Q2.
Comme, $\forall S_n$, une des deux pistes Q1 ou Q2 est $S_n$-valide, d'après la propriété 3-3 P2 est $S_n$-valide $\forall S_n$.

**Corollaire 6-1-2 :**
*P1 et Q1 étant deux pistes opposées, deux pistes P2 et Q2 respectivement conjuguées de P1 et Q1 sont conjuguées.*

En effet, d'après le théoreme 6-1, on a P2 $\subseteq$ Q1 et Q2 $\subseteq$ P1.
Si P2 est $S_n$-invalide alors Q1 est $S_n$-invalide aussi (propriété 3-3), donc Q2 conjuguée de Q1 est $S_n$-valide. De même, si Q2 est $S_n$-invalide alors P1 est $S_n$-invalide aussi, donc P2 conjuguée de P1 est $S_n$-valide. P2 et Q2, satisfaisant la définition des pistes conjuguées, sont donc conjuguées.

## 7. Application

Voici un exemple d'application de ces notions liées aux pistes conjuguées et aux pistes opposées.

Sur la grille de la figure suivante, on trace partiellement un jeu de pistes conjuguées bleue/jaune issues de la paire 4B1 et un jeu de pistes conjuguées verte/violette issues de la paire 6B3. Les deux pistes verte (Q1) et violette (Q2) sont opposées à la piste jaune (P1), pour Q1 dans C1 et pour Q2 dans B8. On peut donc, en vertue du corollaire 7-1-1, valider les 3 candidats de la piste bleue.

La grille peut-être de cette manière entièrement résolue et pour cela nous vous renvoyons à la solution donnée sur cette page web :
http://www.assistant-sudoku.com/Grille_Resolue.php?RID=303

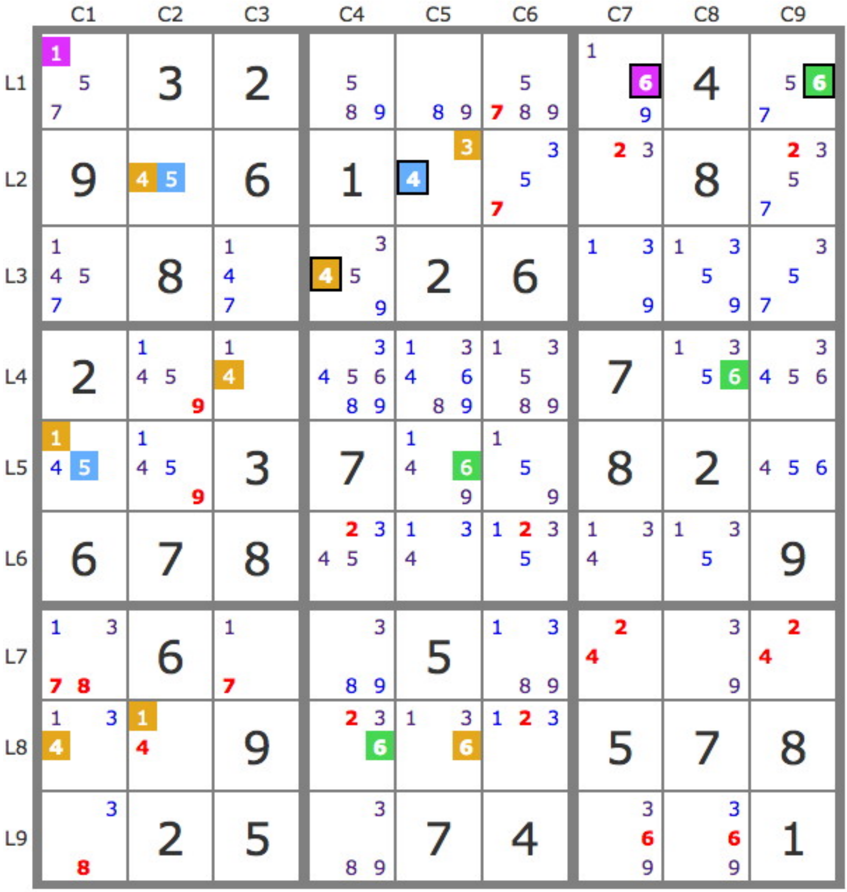

**Fig 3 : interactions de pistes opposées et conjuguées**

## 8. Bifurcation d’une piste

Sur les grilles très difficiles, la représentation d’une piste P se limite généralement à quelques candidats (donc à une trace) car sa construction par les TB est rapidement bloquée. Pour poursuivre sa construction on doit faire appel à une ou des bifurcations de cette piste.

A cet effet, définissons ce que sont une extension et une P-piste d'une piste P.

**Définitions 8-1 :**
*P et P1 étant deux pistes dont les traces P et P1 sont à priori indépendantes.*
*- Le prolongement de P associée à P1 est l'ensemble des candidats $A_i \in G$ que l'on placerait avec les TB si les candidats de P et de P1 étaient placés.*
*- Une P-piste associée à P1, notée PP1, est l'ensemble des candidats $A_i \in G$ formé par ceux de P, ceux de P1 et ceux du prolongement de P associée à P1.*
*On dit aussi que PP1 forme une extension de P.*
*- Si P1 est issue d'un candidat $A_k$ , on écrira PP1($A_k$).*
*- Si P1 est issue d'un ensemble de candidats E, on écrira PP1(E).*
*Lorsque P1 est une antipiste on dira aussi que la P-piste est une P-antipiste. Alors,*
*- Si P1 est issue d'un candidat $A_k$, on écrira PP1'($A_k$).*
*- Si P1 est issue d'un ensemble de candidats E, écrira PP1'(E).*

**A noter,** que (comme précisé dans la définition) pour engendrer une P-piste qui n'est pas réduite à la piste P, ce qui serait sans intérêt puisque P est à ce stade bloquée dans sa construction par les TB, la trace P1 de la piste P1 ne doit pas à priori être incluse dans P.
Ainsi par exemple, $A_k$ ne doit pas être choisi parmi les candidats connus de P pour générer la P-piste PP1($A_k$). De même, pour la P-piste PP1(E), E ne doit pas être choisi parmi les ensembles cachés de P c'est-à-dire qu'aucun des candidats de E ne doit être à priori un candidat de P. Cela n'exclu pas que, ultérieurement et en fonction des avancées obtenues dans la résolution, $A_k$ ou un candidat de E puisse devenir un candidat de P une fois la piste P totalement construite, cela signifiera alors que l'extension effectuée était "une bonne extension" et dans le cas contraire était "une mauvaise extension".

Pour illustrer la définition 8-1 voici, sur la figure suivante, un exemple de construction partielle d'une P-piste. La piste P marquée en bleu est issue du 2L1C5 et P ne compte que deux candidats identifiés. La piste P1 est issue du 1L5C1 et P1 ne compte que 4 candidats identifiés avec le 2L4C1, le 1L1C2 et le 7L4C2. Si on prolonge P en considérant que les 4 candidats de P1 sont des candidats de P on obtient la P-piste PP1 (du moins sa trace) beaucoup plus étendue composée de tous les candidats marqués en jaune et bleu.

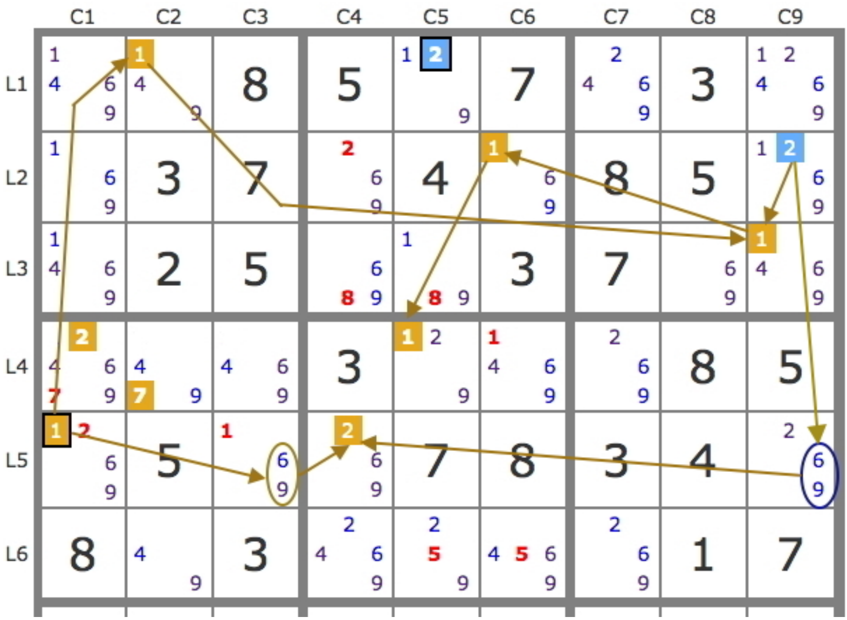

**Fig 4 : P-piste(1L5C1) extension de P(2L1C5)**

**Définition 8-2 :**
*Une P-piste est invalide lorsque qu'elle est invalide au sens de la définition 3-1, c'est-à-dire lorsque le placement des candidats qui la composent conduit à une incompatibilité avec R.*

Ces définitions étant acquises, nous pouvons définir ce qu'est une bifurcation au sens large, par la définition suivante :

**Définitions 8-3 (bifurcation) :**
*Deux P-pistes PP1 et PP2 forment une bifurcation de P, si et seulement si, les invalidités supposées de PP1 et PP2 simultanément impose forcément l'invalidité de P.*
*PP1 et PP2 sont appellées les branches de la bifurcation de P.*

Etablissons deux théorèmes importants qui permettront de trouver les bifurcations d'une même piste P.

**Théorème 8-1 :**
*La P-piste PP1(E) et la P-antipiste PP1'(E) forment une bifurcation de la piste P.*

En effet : PP1(E) et PP1'(E) étant supposée invalide, si P était valide, il existerait une solution $S_n$ telle que P $\subseteq S_n$. Dès lors :
- soit aucun $A_k \in$ E n'est un candidat solution $\in S_n$, alors tous les candidats de PP1'(E) serait par définition et construction des candidats solutions $\in S_n$ ce qui est en contradiction avec le fait que leur placement est incompatible avec R.
- soit un $A_k \in$ E au moins est un candidat solution $\in S_n$, alors tous les candidats de PP1(E) seraient pas définition et construction des candidats solutions $\in S_n$ ce qui est en contradiction avec le fait que leur placement est incompatible avec R.
Donc, PP1(E) et PP1'(E) étant supposée invalide, P le serait aussi aussi obligatoirement, c'est-à-dire que PP1(E) et PP1'(E) forment une bifurcation de P.

**Théorème 8-2 :**
*E étant la réunion de deux ensembles distincts de candidats E1 et E2, si PP1'(E) est invalide, alors PP1(E1) et PP1(E2) forment une bifurcation de P.*

En effet, PP1(E1) et PP1(E2) étant supposée invalide, si P était valide, il existerait une solution $S_n$ telle que P $\subseteq S_n$. Si alors aucun des candidats de E n'était un candidat solution $\in S_n$, tous les candidats de PP1'(E) seraient par définition et constrcution des candidats solutions $\in S_n$ ce qui est en contradiction avec le fait que leur placement est incompatible avec R. Donc un au moins $A_k \in$ E serait candidat solution $\in S_n$. Dès lors :
- si $A_k \in$ E1, tous les candidats de PP1(E1) seraient par définition et construction des candidats solution $\in S_n$ ce qui est en contradiction avec le fait que leur placement est incompatible avec R.
- si $A_k \in$ E2, tous les candidats de PP1(E2) seraient par définition et construction des candidats $\in S_n$ ce qui est en contradiction avec le fait que leur placement est incompatible avec R.
Donc, PP1(E1) et PP1(E2) étant supposée invalide, P le serait aussi obligatoirement, c'est-à-dire que PP1(E1) et PP1(E2) forment une bifurcation de P.

**En pratique**, il résulte de ces deux théorèmes que, les bifurcations les plus évidentes d'une même piste sont :
- les P-pistes issues des deux candidats d'une paire réelle ou cachée.

- les P-pistes issues des deux ensembles d'une paire d'ensembles réelle ou cachée.

**A quoi servent une P-piste et une bifurcation ?**

Développer une piste P bloquée à sa trace P c'est construire P à l'aide des TB et d'une extension PP1 sans préjuger du statut de P (valide ou invalide) et ce dans le but de construire une solution.

Si le choix d'une extension PP1 qui n'est pas la seule possible conduit à l'invalidité de P, c'est que ce choix préjuge du statut de la piste et à ce titre n'est pas un bon choix puisque d'autres sont possibles.

En particulier, si faire l'hypothèse qu'un candidat $A_k$ (parmi d'autres n'appartenant pas à P ) est un candidat de P conduit à établir l'invalidité de P, c'est que $A_k$ n'est pas un candidat de P.

Une bifurcation de P permet de déterminer un bon choix d'extension pour développer une piste P bloquée à sa trace P.
En effet, on peut dire que si une des deux branches est invalide, pour ne pas préjuger du statut de P, c'est l'autre qui est un bon choix d'extension pour le développement de P.

Il est possible toutefois, ayant montré qu'une branche PP1 d'une bifurcation de P est invalide, que l'on montre ensuite que l'autre branche PP2 est aussi invalide. Selon par laquelle des deux branches on a commencé l'étude on déduit des prolongements différents de P qui sont de bons choix l'un et l'autre, mais conduisent finalement toutes deux à leur invalidité. Cela signifie que P est effectivement invalide, car les invalidités de PP1 et PP2 ne sont plus "supposées" mais "effectives".

Etablissons quelques propriétés utiles au développement d'une piste.

**Propriété 8-1 :**
*Un candidat n'appartenant pas à P qui voit les deux branches d'une bifurcation de P n'est pas un candidat de P.*

En effet, si $A_k$ n'appartenant pas à P voit les deux branches PP1 et PP2 d'une bifurcation de P, c'est que $A_k$ voit $A_i \in$ PP1 et voit $A_r \in$ PP2.
Si $A_k \in$ P, alors par définition et construction, $A_k \in$ PP1 et $A_k \in$ PP2, lesquelles seraient invalides puiqu'elles compteraient aussi respectivement avec $A_i$ et $A_r$ des candidats qui se voient. Donc P serait invalide, ce qui préjuge de son statut. $A_k$ n'est donc pas un candidat de P.

**Propriété 8-2 :**
*Un candidat commun aux deux branches d'une bifurcation d'une piste P est un candidat de P.*

En effet, cette propriété est une conséquence de la propriété 8-1, puisque tous les autres candidats de la case contenant un candidat commun aux deux branches de la bifurcation de P voient les deux branches, et en conséqence, ne sont pas des candidats de P dans cette case. Ne subsiste donc plus dans cette case comme candidat pouvant être un candidat de P que le candidat commun aux deux branches de P.

**Propriété 8-3 :**
*Si une branche d'une bifurcation d'une piste P est invalide, tous les candidats de l'autre branche sont des candidats de P.*

En effet, cela résulte de la définition même d'une bifurcation. Si une branche est invalide, l'autre devient un bon choix pour développer P.

## 9. Application

Voici une exemple d'utilisation d'une bifurcation permettant de débloquer une grille par prolongement d'une piste.

Reprenons la grille de la figure 2 pour la traiter autrement.

Pour prolonger la piste bleue P dont la trace ne compte que 3 candidats, on utilise une bifurcation de P formée des deux P-pistes verte issue du 4L4C4 et violette issue du 4L6C4 (figure 5).
Ces deux P-pistes forment bien une bifurcation de P, puisque (théoreme 8-2) la P-antipiste issue de l'ensemble E={4L4C4, 4L6C4} est visiblement invalide sur C4. Ou, dit autrement, les deux P-pistes forment une bifurcation de P car (théorème 8-1) la P-piste violette est la P-antipiste de la P-piste verte.

Les deux branches de la bifurcations ayant en commun le 1L4C3 celui-ci est donc un candidat de la piste bleue, laquelle se développe alors très significativement par les TB au point de couvrir la grille pour fournir une solution (affirmation laissée à votre vérification).

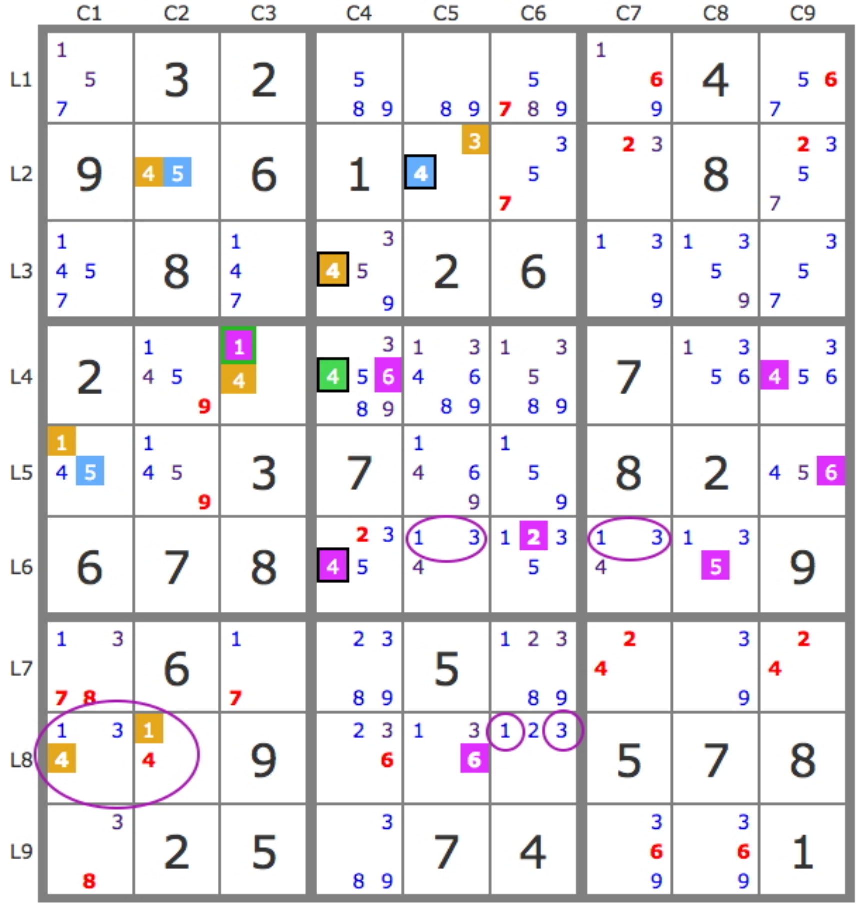


**Fig 5 : Bifurcation d'une piste**

## 11. Unicité et niveau de difficulté TDP

La technique des pistes permet d'évaluer le niveau de difficulté d'une grille à solution unique différemment de celui, dit conventionnel, obtenu par les techniques évoluées (X-wing, Swordfich, ALS, …), cela en apportant la preuve que la grille, dont à priori rien n'indique qu'elle n'a qu'une seule solution, est bien à solution unique.

**Propriété 11-1 :**
*La solution d'une grille est unique **si** pour chaque jeu de pistes utilisé lors de la résolution de la grille par la technique des pistes, le placement des candidats solutions est obtenu par application des propriétés d'interactions 4-1,2,3 et des propriétés de bifurcations 8-1,2,3.*

En effet, selon ces propriétés, tout candidat placé est commun à toutes les solutions $S_n$. Ainsi, si on aboutit par ce procédé à construire une solution, toutes les solutions ont les mêmes candidats, c'est à dire qu'il n'y a qu'une solution.

**Définition 11-1 :**
*La taille d'une résolution d'une grille à solution unique est le nombre d'invalidités nécessaires pour établir l'unicité de la solution lors de la construction de cette solution par la technique des pistes.*

Par exemple, si la solution d'une grille à solution unique est obtenue par l'utilisation de deux jeux des pistes conjuguées, le premier jeu en constatant l'invalidité d'une des deux pistes, le second jeu en constatant l'invalidité des deux branches d'une bifurcation d'une des deux pistes, la taille de la résolution est de 3 : +1 pour l'invalidité du premier jeu de pistes et +2 pour l'invalidité des deux branches de la bifurcation utilisée dans le second jeu de pistes.

Cette définition de la taille a l'inconvénient de poser problème dans le cas où un jeu de pistes conjuguées est formé de deux pistes valides (ce qui est rare mais possible) puisqu'alors il n'y a pas d'invalidité associée à ce jeu de pistes. C'est aussi le cas pour deux pistes (ou une bifurcation) dont seul le croisement (propriétés 4-2 et 8-2) est utilisé.
C'est pourquoi il convient de complèter cette définition de la taille en précisant qu'il faut compter les invalidités sous-jacentes pour chaque jeu de pistes (ou bifurcation) dont l'invalidité d'une des deux pistes (ou branches) n'a pas été utilisée ou établie.

Par exemple, une résolution réalisée avec un seul jeu de pistes conjuguées par croisement (propriété 4-2) ne fait apparaître aucune invalidité. Sa taille n'est pas zéro mais 1.

**Définition 11-2 :**
*Le niveau TDP d'une grille est la taille minimale de toutes les résolutions possibles de la grille par la technique des pistes.*
*On convient dans cette définition que le niveau TDP = 0 est celui d'une grille que l'on peut résoudre par les seules TB.*

Cette définition n'est pas facile à mettre en œuvre car il n'est pas concevable de trouver toutes les résolutions possibles par la technique des pistes. Elle a toutefois l'avantage de fixer une borne supérieure qui est la plus petite taille obtenue parmi les résolutions réalisées et aisni donner un assez bonne estimation de la difficulté d'une grille.

Voici une comparaison empirique sur la base de nombreuses grilles traitées, entre les niveaux conventionnels et les niveaux TDP. Cela donne une bonne idée des niveaux de difficultés TDP des grilles usuelles et une bonne indication du nombre de jeux de pistes à utiliser pour les résoudre.

| Niveau conventionnel | Niveau TDP |
|---|---|
| 1 à 6 | 0 |
| 7 à 9 | 1 |
| 10 à 12 | 2 |
| 13 à 17 | 3 |
| 18 à 24 | 4 |

## 12. Conclusion

Les propriétés énoncées et démontrées permettent de venir à bout de toutes les grilles de sudoku.
D'un point de vue pratique, la technique est présentée et illustrée par de nombreux exemples dans mon livre "**Technique des pistes en sudoku**" et sur le site internet qui l'accompagne **www.assistant-sudoku.com** .
Les grilles proposées au public sont généralement à solution unique, pour s'exercer à la technique des pistes sur des grilles à solutions multiples, on pourra utiliser les Grilles N°359 et N°425 du site internet www.assistant-sudoku.com , et plus généralement sur une grille à solution unique de laquelle on retire un candidat dévoilé.

*Toulouse octobre 2015, mise à jour novembre 2016, janvier 2017, décembre 2017.*